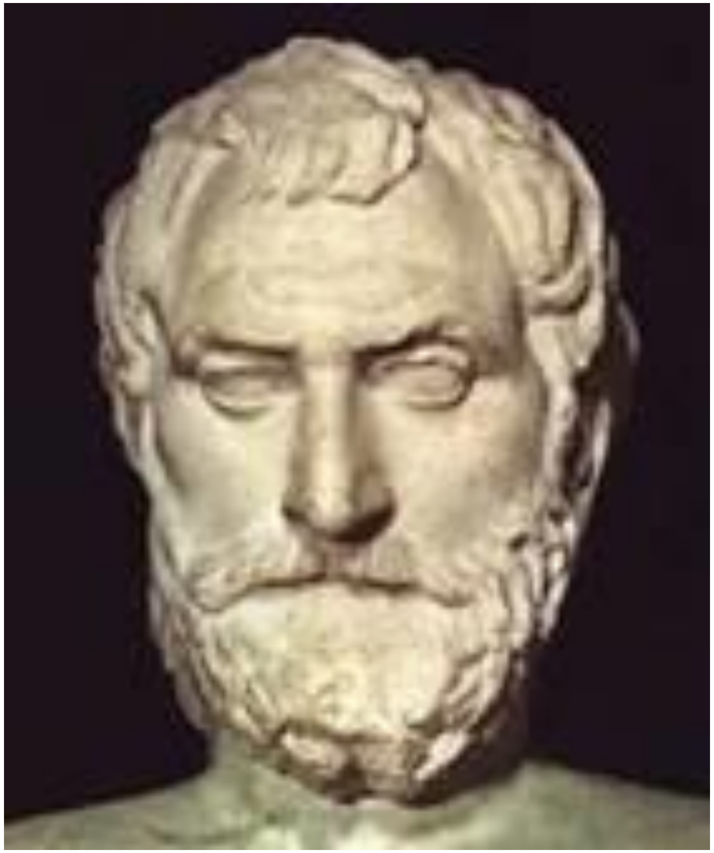
Электродинамика

1. Лекции + семинары
2. Зачет

Электродинамика ?
Это элементарно, Ватсон !

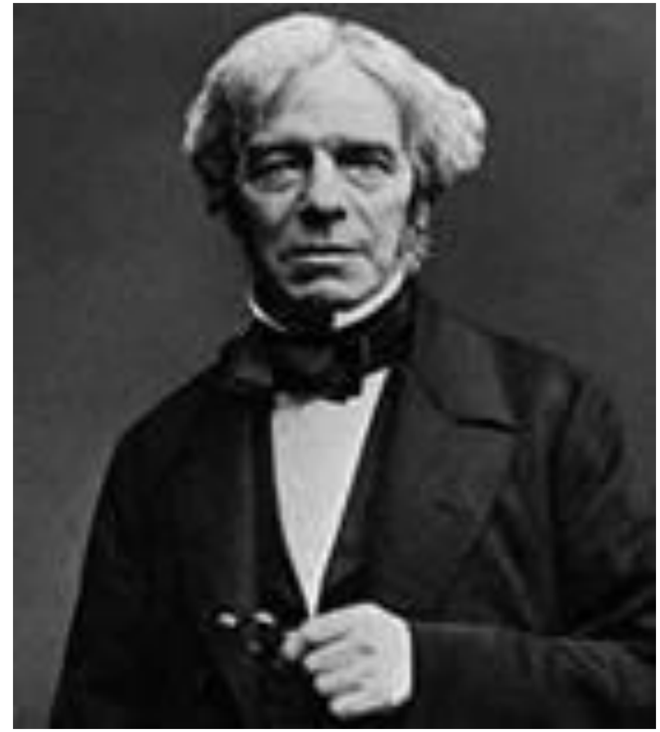
1. Алексей Николаевич Матвеев. Электричество и магнетизм. М., Высшая школа, 1983.
2. Сергей Григорьевич Калашников. Электричество. М., Наука, 1985.
3. Дмитрий Васильевич Сивухин. Общий курс физики. Т.3., М., Наука, 1983.
4. Игорь Евгеньевич Тамм. Основы теории электричества. М., Наука, 1989.

5. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. (под ред. И.А. Яковлева). М., Наука, 1977.
6. Н.В. Нетребко, И.П. Николаев, М.С. Полякова, В.И. Шмальгаузен. Электричество и магнетизм. Практические занятия по физике для студентов-математиков, часть III (под редакцией В.А. Макарова). М., Макс-пресс, 2006.
7. Л.И. Антонов, Л.Г. Деденко, А.Н. Матвеев. Методика решения задач по электричеству. М., МГУ, 1982.
8. Н.Н. Брандт, Г.А. Миронова, А.М. Салецкий. Электростатика в вопросах и задачах. Пособие по решению задач для студентов. Санкт-Петербург, Лань, 2011.



Фалес из Милета
(624—548 до н. э)

Вильям Гильберт
(1544—1603)



Шарль Огюстен Кулон
(1736— 1806)

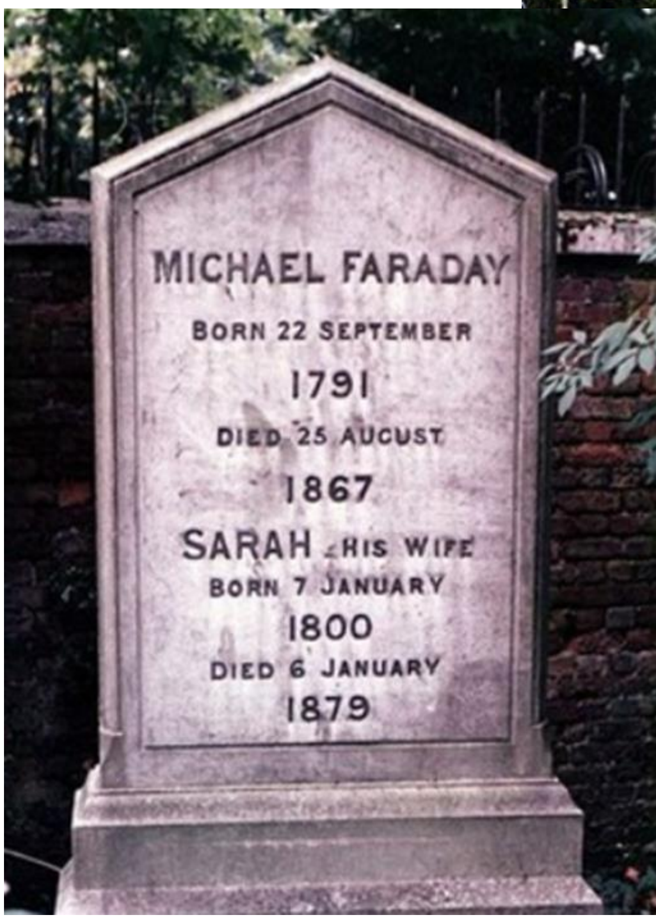
Майкл Фарадей
(1791 — 1867)

Великобритания, 20 фунтов, 1993

Оригинальные цвета банкнот несколько изменены

«ОДНАЖДЫ, СЭР, ВЫ ОБЛОЖИТЕ ЕГО НАЛОГОМ»

(Ответ Майкла Фарадея на вопрос канцлера казначейства Великобритании о практической пользе электричества), родился 22 сентября 1791 года


MICHAEL FARADAY
BORN 22 SEPTEMBER
1791
DIED 25 AUGUST
1867
SARAH HIS WIFE
BORN 7 JANUARY
1800
DIED 6 JANUARY
1879

Ампер Андре Мари
(1775 — 1836)

Джеймс Кларк Максвелл
(1831 — 1879)

Лоренц Хендрик Антон
(1853 — 1928)

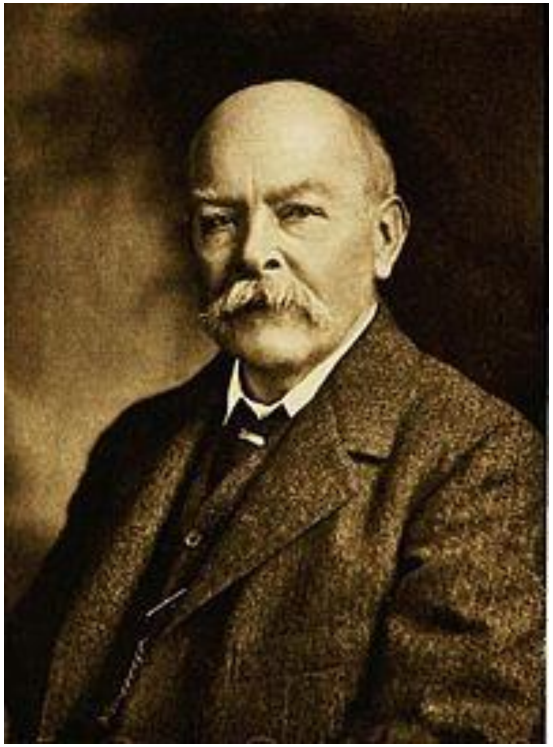
Николай Алексеевич Умов
(1846 — 1915)

И было: много, много дум,
И метафизики, и шумов...
И строгой физикой мой ум
Переполнял профессор Умов.

Над мглой космической он пел,
Развив власы и выгнув выю,
Что парадоксами Максвелл
Уничтожает энтропию, –

Что взрывы, полные игры,
Таят томсоновые вихри
И что огромные миры
В атомных силах не утихли...

Андрей Белый



Джон Генри Пойтинг
(1852 — 1914)

Генрих Герц
(1857 — 1894)

Александр Степанович Попов
(1859 — 1905)

Петр Николаевич Лебедев
(1866 — 1912)

Никола Тесла
(1856 — 1943)

Югославия, 100 динаров, 2000

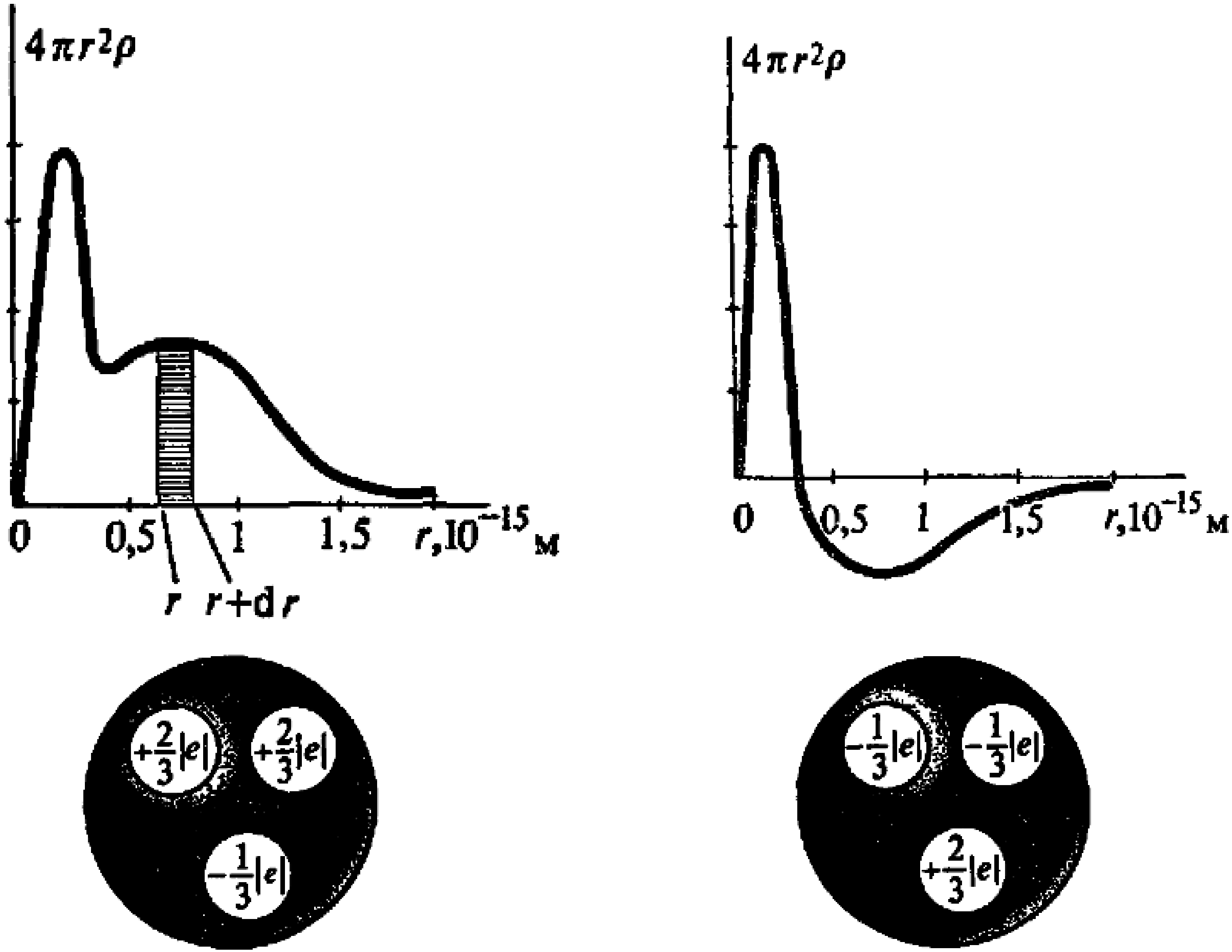
Оригинальные цвета банкнот несколько изменены

«ВАМ ЗНАКОМО ВЫРАЖЕНИЕ «ВЫШЕ ГОЛОВЫ НЕ ПРЫГНЕШЬ»? ЭТО ЗАБЛУЖДЕНИЕ. ЧЕЛОВЕК МОЖЕТ ВСЁ»

Никола Тесла,
родился 10 июля 1856 года

Существует лишь небольшое число частиц с бесконечным временем жизни. Это электрон, протон и их античастицы

$e=1,6021892\ldots.. \times 10^{-19}$ кулон



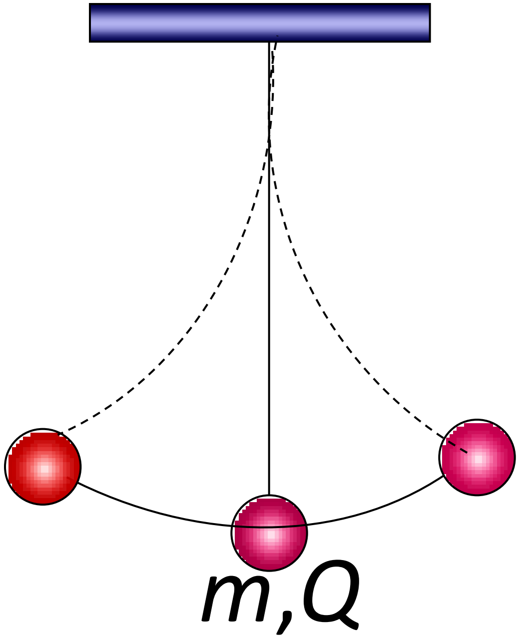
4πr²ρ
0
0,5
1
1,5
r,10⁻¹⁵ м
r
r+dr
+2/3|e|
+2/3|e|
−1/3|e|
4πr²ρ
0
0,5
1
1,5
r,10⁻¹⁵ м
−1/3|e|
−1/3|e|
+2/3|e|

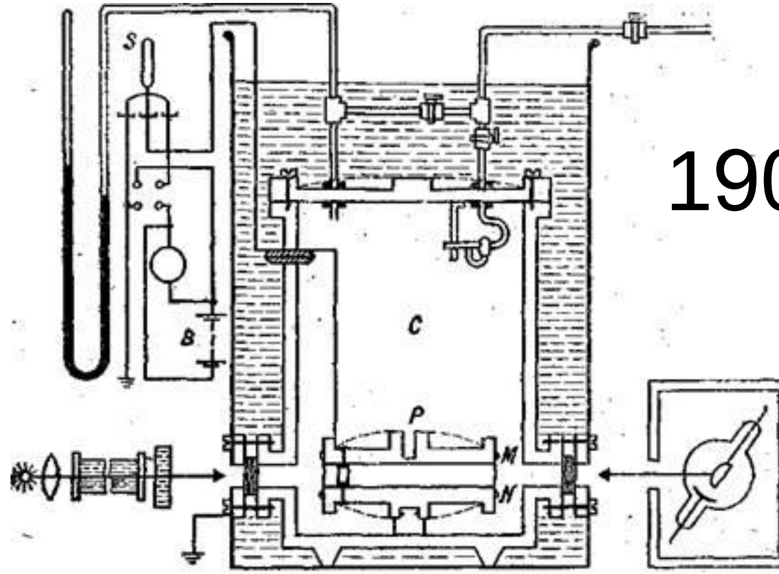
Резонансный метод

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{qE_0}{ml}\cos\omega t$$

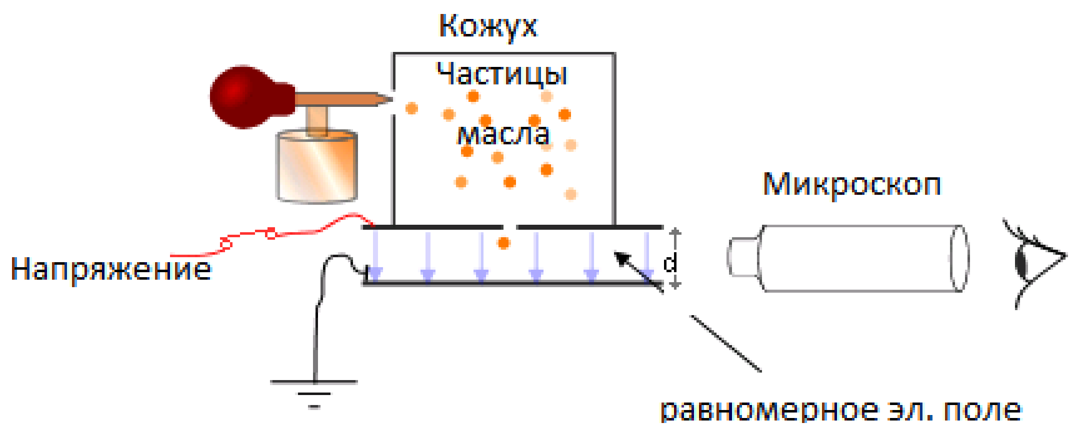
$$\omega_0 \approx \omega$$

$$\varphi_{\max} \approx \frac{qE_0}{2\delta m\omega_0 l}$$

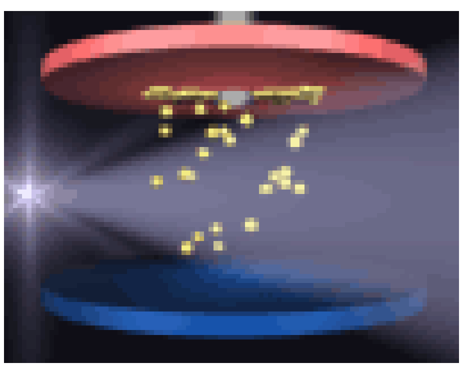




1909 г.

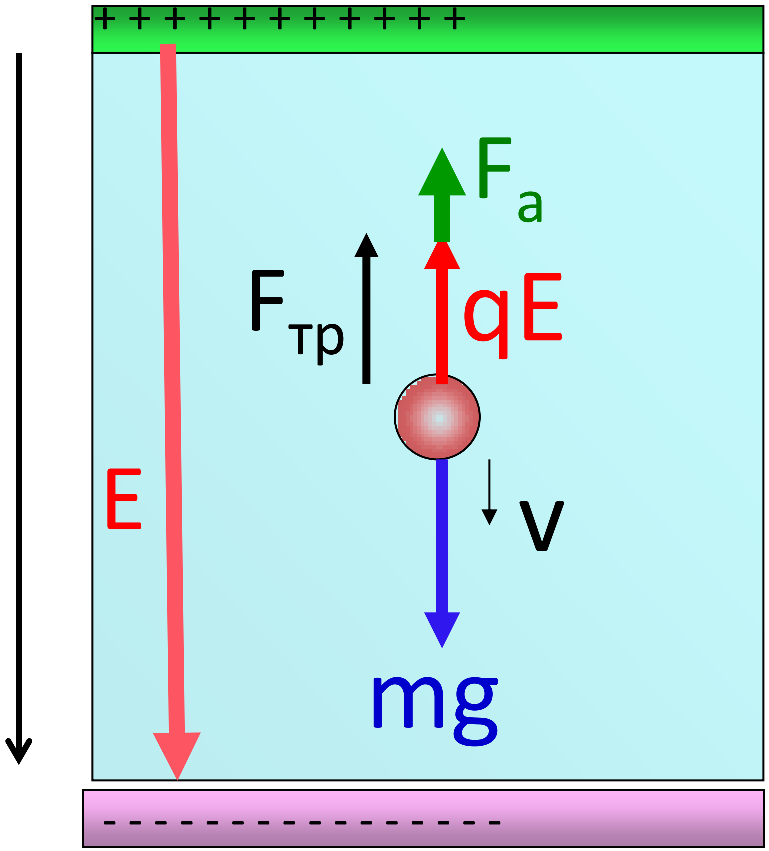


Милликен
Роберт Эндрус



$e = 1{,}6021892\ldots \times 10^{-19}$ кулон

Опыт Милликена 1909 г.

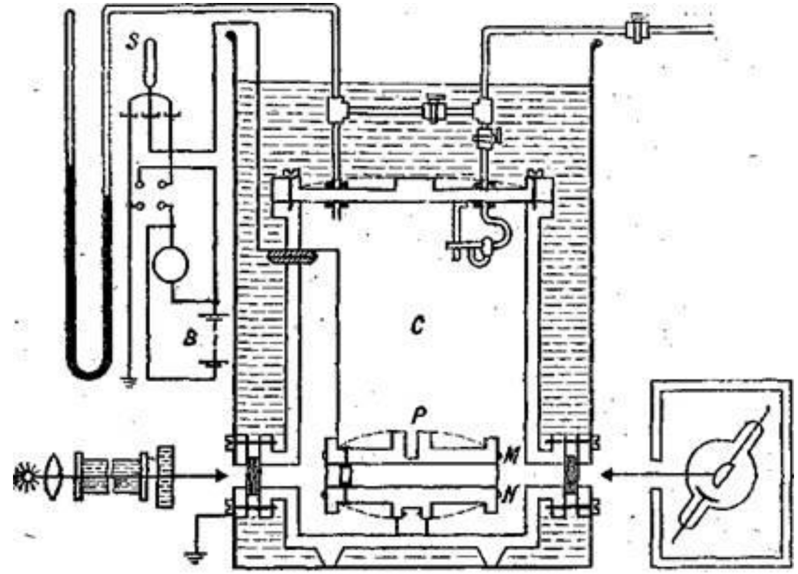


$$-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_в g - qE + \frac{4}{3}\pi r^3\rho_k g - \alpha v = 0$$

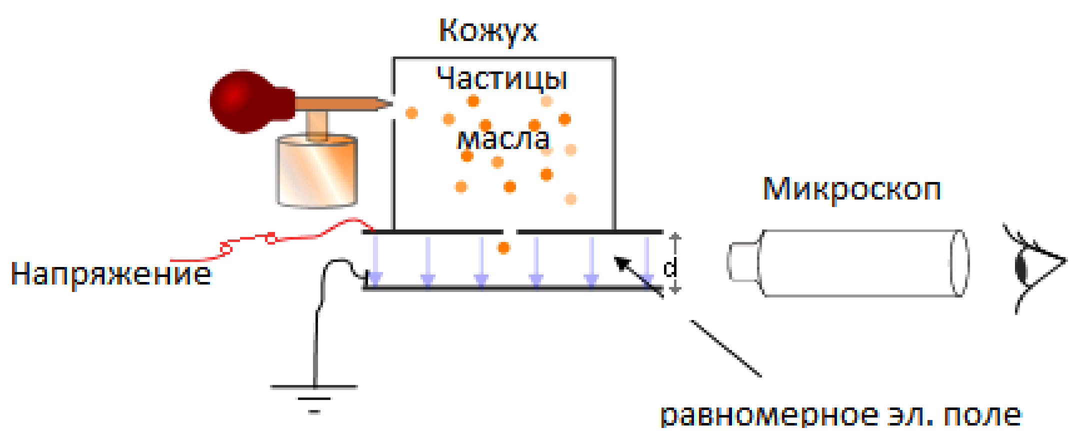
$$-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_в g + \frac{4}{3}\pi r^3\rho_k g - \alpha v_1 = 0$$

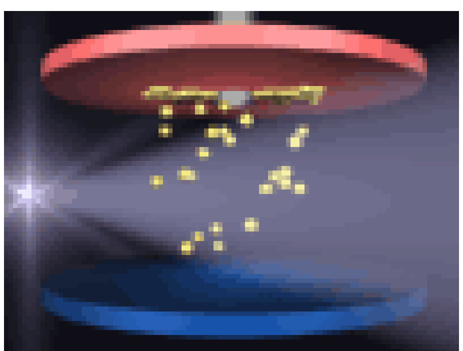
$$-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_в g - q_1 E + \frac{4}{3}\pi r^3\rho_k g - \alpha v_2 = 0$$

$$\Delta q_{\min} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$$



Милликен
Роберт Эндрус





$e = 1{,}6021892\ldots.. \times 10^{-19}$ кулон

$$\frac{e_+ - e_-}{e_\pm} \le 10^{-21}$$

Нейтральность отдельных атомов проверялась прямыми экспериментами

Закон сохранения заряда

1. Электроны и протоны — частицы с бесконечным временем жизни, их заряды инвариантны при переходе от одной инерциальной системы координат к другой и не зависят от скорости.
2. При любом процессе взаимопревращения частиц их суммарный заряд до взаимодействия равен суммарному заряду после взаимодействия.

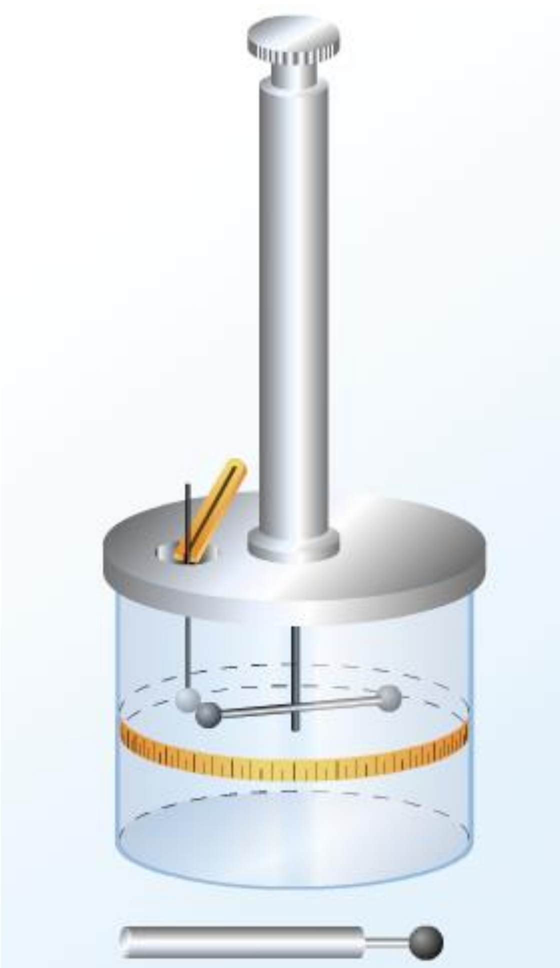
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\oint\limits_{S_0} \mathbf{j}\,d\mathbf{s}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\oint\limits_{V_0} \rho\,dv = \oint\limits_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv \qquad \oint\limits_{S_0} \mathbf{j}\,d\mathbf{s} = \oint\limits_{V_0} \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

Закон Кулона



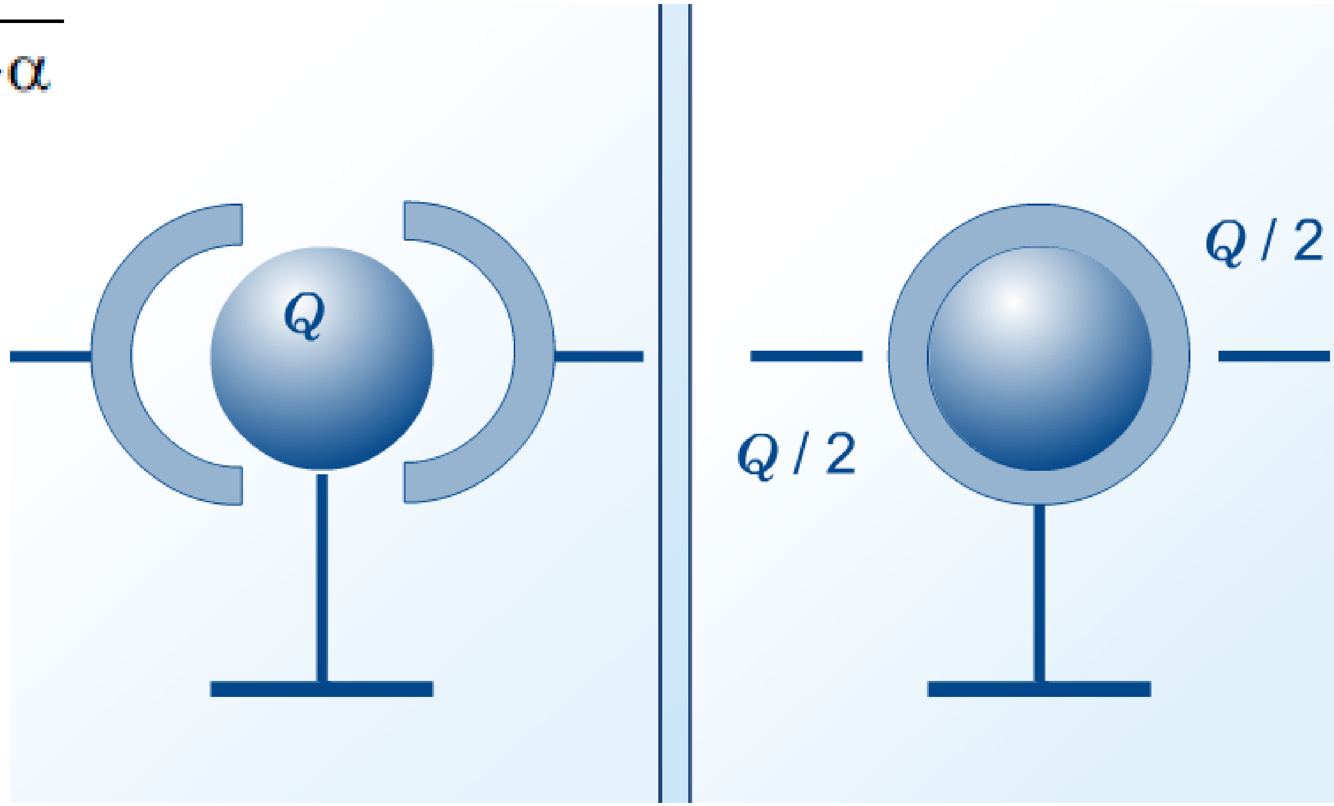
Два неподвижных точечных заряда q_1 и q_2 (заряженных тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними), в инерциальной системе отсчета взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной величинам зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния r_{12} между ними. Сила, с которой заряд q_1 действует на заряд q_2:

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}.$$

Она направлена по прямой, соединяющей заряды, и является силой притяжения для разноименных зарядов и отталкивания для одноименных (вектор $\bar{\mathbf{r}}_{12}$ направлен от заряда q_1 в сторону заряда q_2). Коэффициент пропорциональности в зависит от выбора единиц измерения.

В СИ $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2).

$$\mathbf{F} \propto \frac{\mathbf{r}}{r^{3+\alpha}}$$



$$|\alpha| \leq 0.02$$

Генри Кавендиш

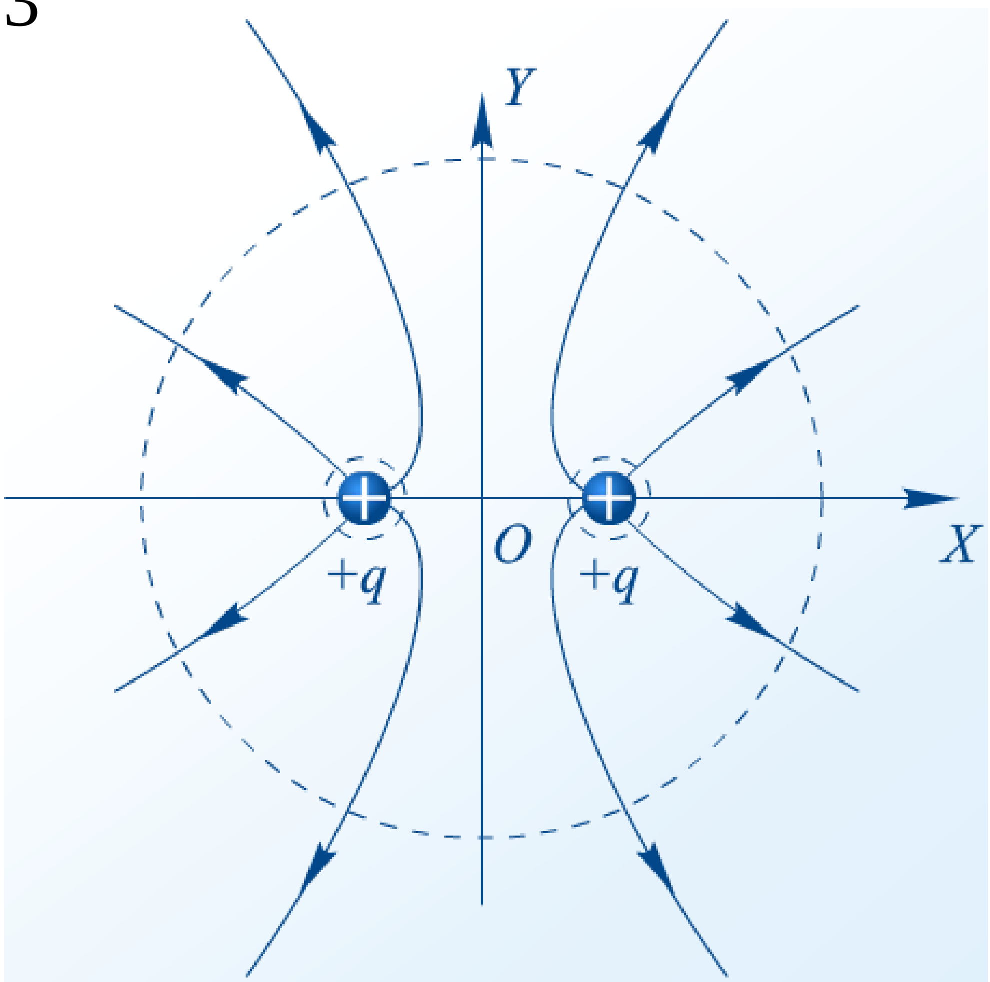
$$|\alpha| \leq |2{,}7 \pm 3{,}1| \cdot 10^{-16}$$ (1971)

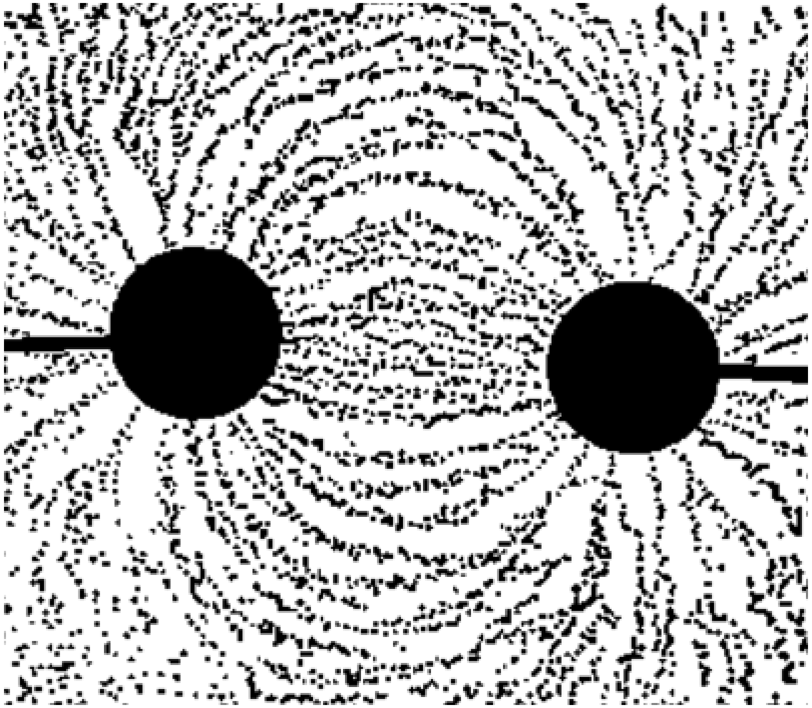
Принцип суперпозиции

1. Сила взаимодействия двух точечных зарядов не меняется в присутствии третьего.
2. Сила, действующая на точечный заряд со стороны двух точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$$

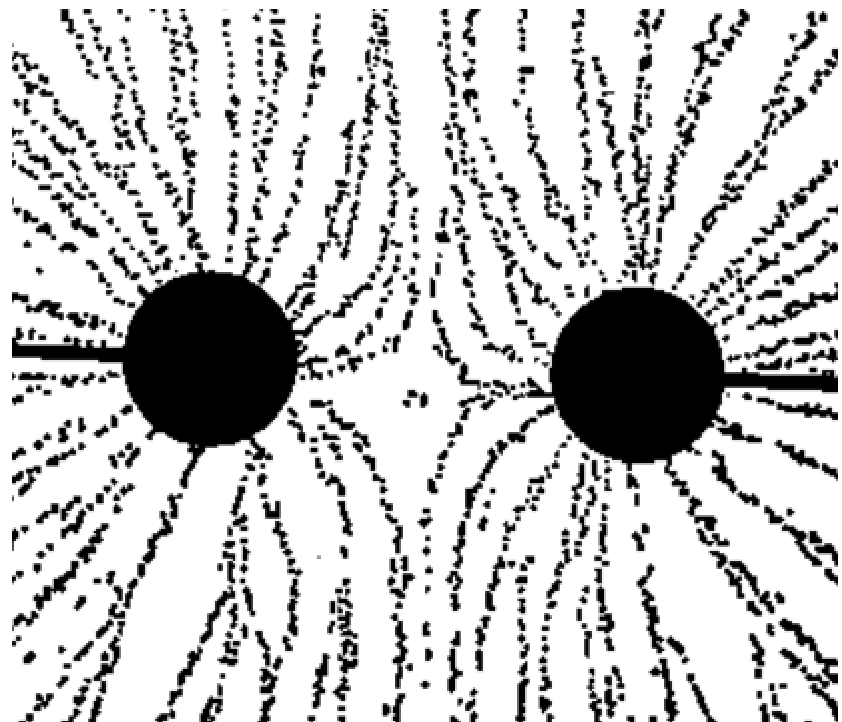
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$$

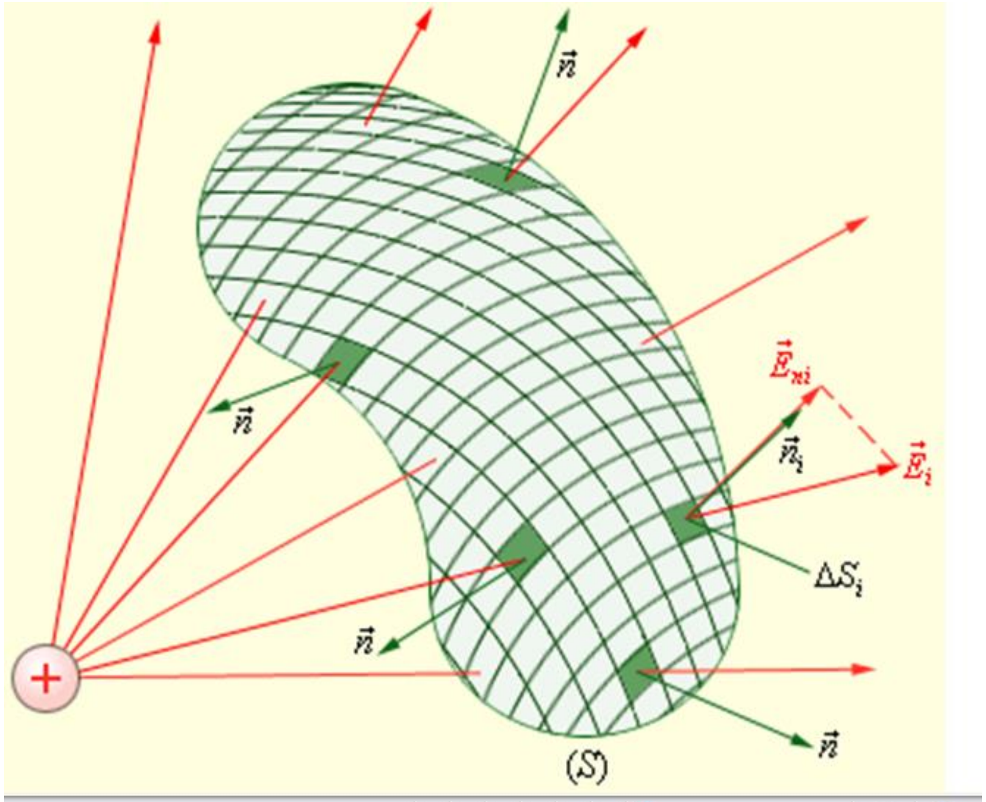


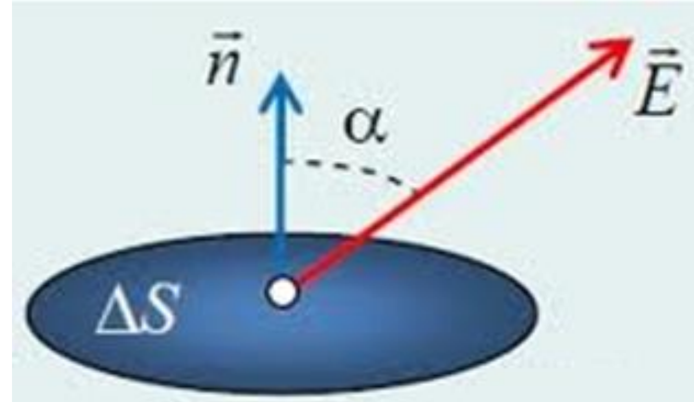


Разноименные
заряды

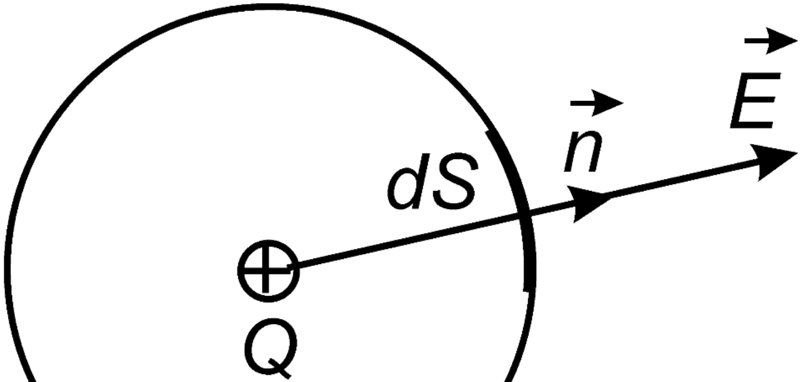
Одноименные
заряды



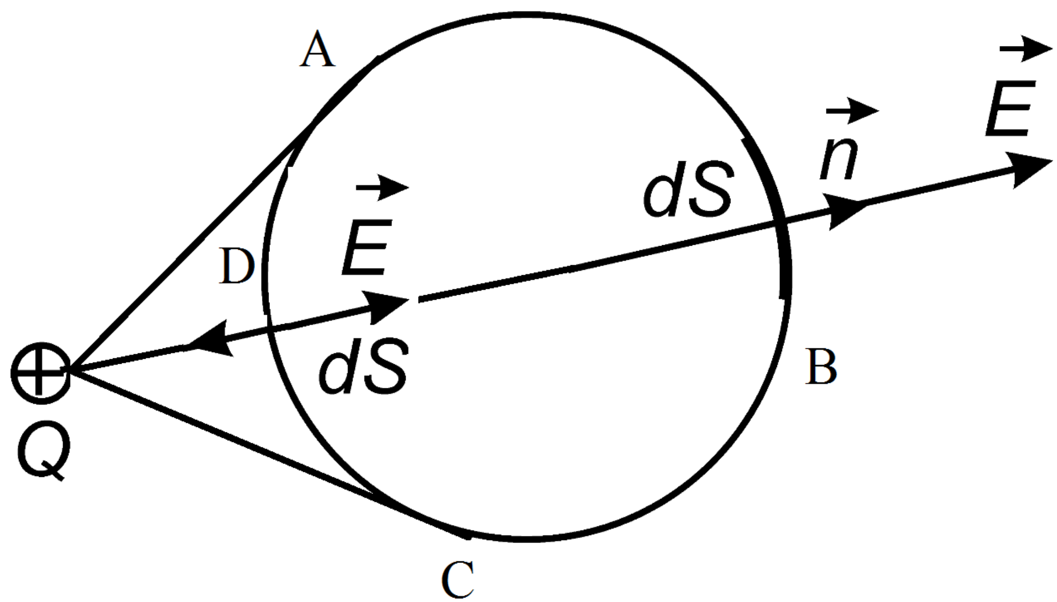




$$\int_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S_0} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{s}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S_0} \frac{ds'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S_0} d\Omega$$



$$\oint_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S_0} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\oint_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int_{ABC} d\Omega - \int_{ADC} d\Omega \right) = 0$$

$$\oint_{S_0} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i d\mathbf{s} = \oint_{S_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3} \mathbf{r}_i d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \oint_{S_0} \frac{\mathbf{r}_i d\mathbf{s}}{r_i^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \oint_{S_0} d\Omega_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Теорема Гаусса

$$\oint_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z)$$

Сила называется потенциальной, если ее работа вдоль любой замкнутой траектории равна нулю. Кулоновские силы удовлетворяют этому условию

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{l} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})$$

$$\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha \operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad}\alpha \times \mathbf{a}]$$

$$[\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a})]_x = \underline{\partial_y(\alpha a_z)} - \partial_z(\alpha a_y) =$$

$$= \underline{\alpha\partial_y a_z} - \alpha\partial_z a_y + \underline{a_z\partial_y\alpha} - a_y\partial_z\alpha =$$

$$= \alpha(\partial_y a_z - \partial_z a_y) + [\operatorname{grad}\alpha \times \mathbf{a}]_x =$$

$$= \alpha[\operatorname{rot}\mathbf{a}]_x + [\operatorname{grad}\alpha \times \mathbf{a}]_x$$

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{rot}\frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\underbrace{\frac{1}{r^3}\operatorname{rot}\mathbf{r}}_{=0} + \overbrace{\left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)\times\mathbf{r}\right]}^{=0}\right\} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rot}\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{rot}\frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} = 0$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3} = -\operatorname{grad}\left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}\right) = -\operatorname{grad}\varphi_i \qquad \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\varphi_i = -\operatorname{grad}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i =$$

$$= -\operatorname{grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

Потенциал - работа по перемещению единичного заряда на бесконечно большое расстояние

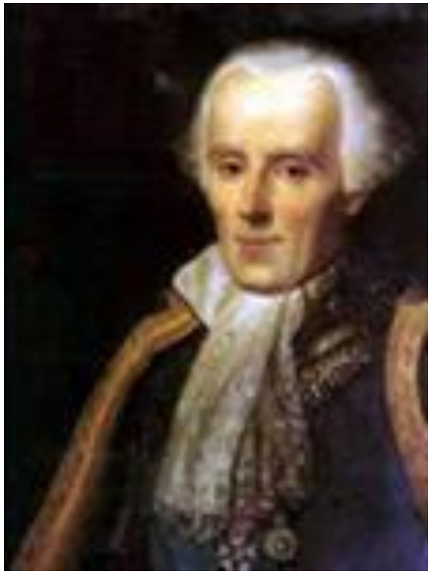
$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \int_{r_i}^{\infty} E_i dr_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_i}^{\infty}\frac{dr_i}{r_i^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \\ \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\end{gathered}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi = \rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0$$

Уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$



Уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0$$

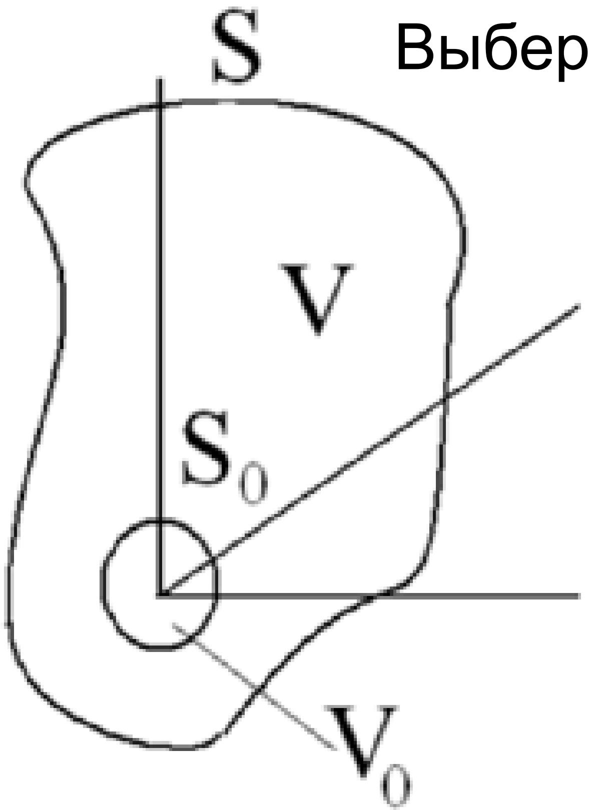
$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

Решение уравнения

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|}$$

Найдем потенциал в произвольной точке, приняв ее за начало координат

$$\int_{V-V_0} (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)dv = \oint_{S+S_0} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) ds$$

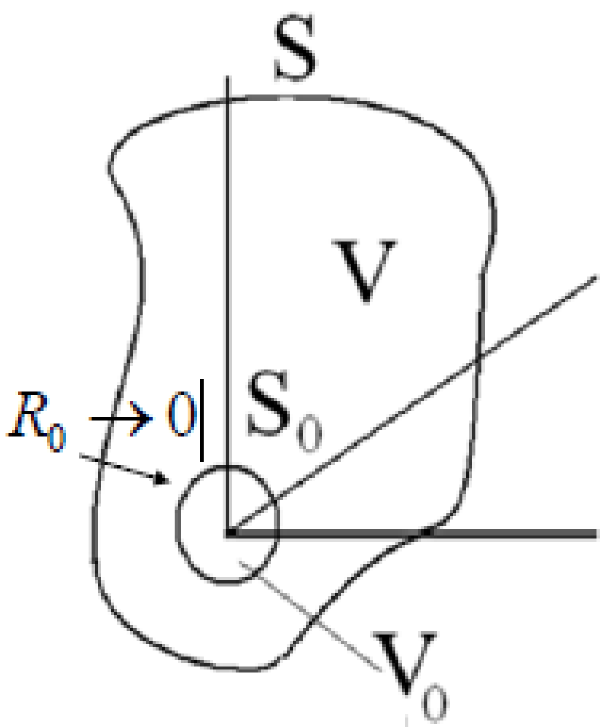


Выберем $\psi = \frac{1}{r'} \Rightarrow \Delta\psi = 0$

$$\Delta\varphi = -\rho / \varepsilon_0$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{V-V_0} \frac{\rho}{r'} dv =$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S+S_0} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r'} \right) \right) dS$$



$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r'}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0}\frac{\rho}{r'}dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS$$

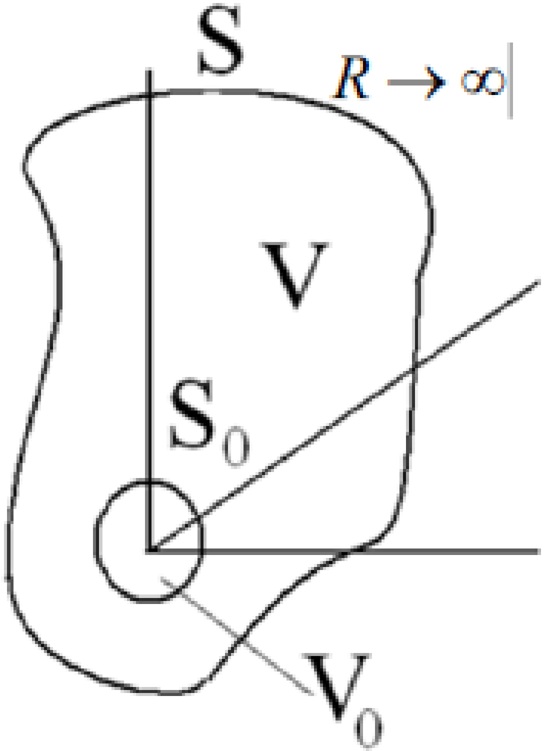
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)_{R_0} = \left[-\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{1}{r'}\right)\right]_{r'=R_0} = \frac{1}{R_0^2}$$

$$R_0 \to 0$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left(\frac{\varphi}{R_0^2} + \frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi}{\partial r'}\right)dS =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\tilde{\varphi}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r'}\right)\right)\oint_{S_0} dS = -\tilde{\varphi} + R_0\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r'}\right) \Rightarrow -\varphi(0)$$

$$R_0 \to 0$$



$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_V \frac{\rho}{r'}\,dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{V_0} \frac{\rho}{r'}\,dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS +$$

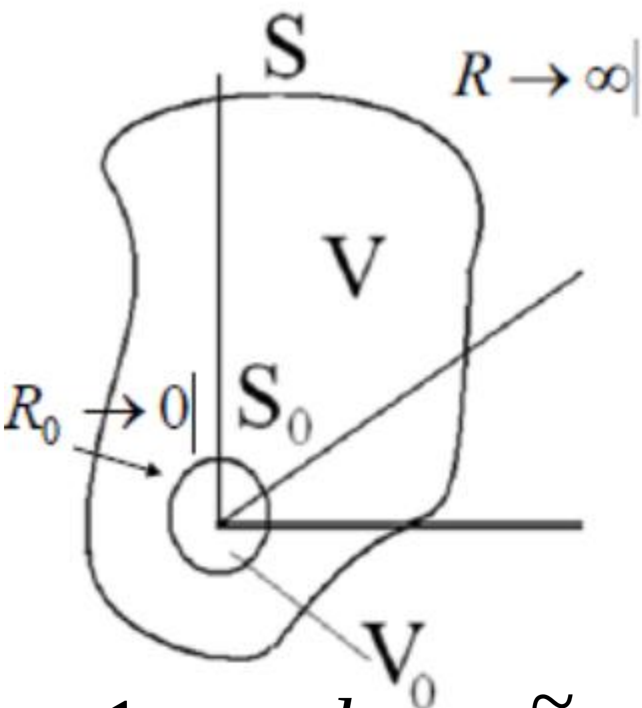
$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0} \left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS$$

$$R \to \infty \quad \Rightarrow \left|\varphi \propto C_1 / R, \quad \partial\varphi / \partial R \propto C_2 / R^2\right.$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S\to\infty} \left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS = \frac{1}{4\pi}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{C_2}{R^3} + \frac{C_1}{R}\frac{1}{R^2}\right)\oint_{S\to\infty} dS =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{C_2}{R} + \frac{C_1}{R}\right) = 0$$

$R \to \infty$



$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_V \frac{\rho}{r'}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{V_0} \frac{\rho}{r'}dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0} \left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)\right)dS$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{V_0}\frac{\rho dv}{r'} = \frac{\tilde{\rho}}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{V_0}\frac{r'^2\sin\theta dr' d\theta d\tilde{\varphi}}{r'} = \frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon_0} \to 0$$

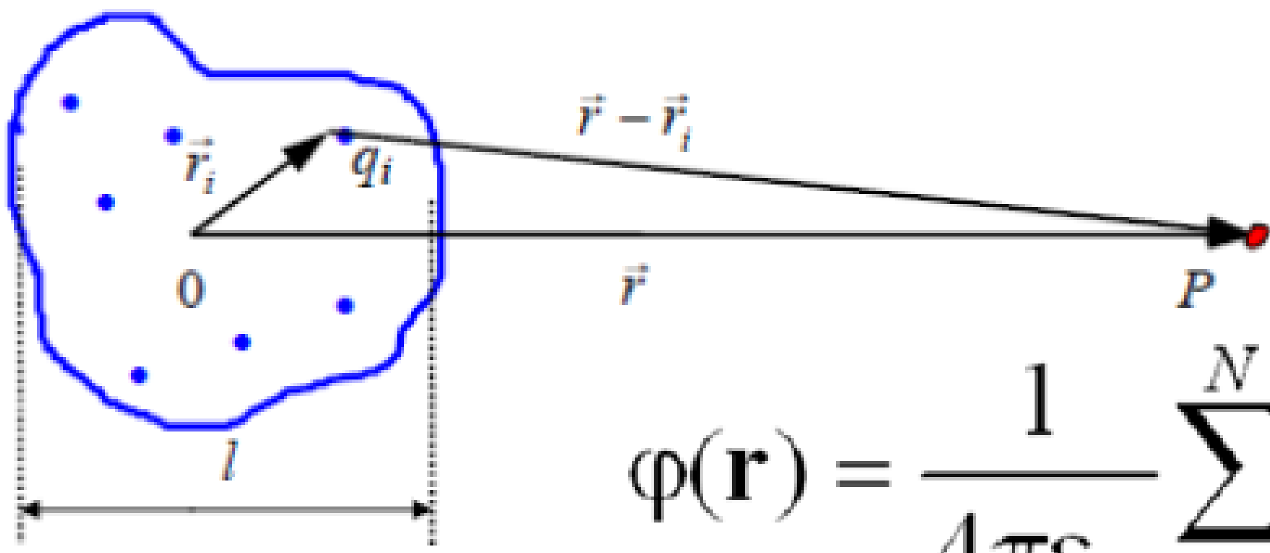
$$(R_0 \to 0)$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{R\to\infty}\oint_V \frac{\rho}{r'}dv = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{\rho}{r'}dv$$

Объединяя полученные выражения, получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

- решение уравнения $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$



$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|r-r_i|} = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \left\{ \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^{3} x_{i\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r_i=0} - \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} x_{i\alpha}x_{i\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r_i=0} + \ldots \right\} = \\
&= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r}$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{3} q_i x_{i\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0}$$

Нейтральная система $\varphi_0 = 0$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{3} q_i x_{i\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{3} q_i x_{i\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r_i=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{i=1}^{n} q_i x_{i\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r_i=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha=1}^{3} d_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{r_i=0} =$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\mathbf{d}\cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\boxed{\begin{gathered} d_\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i x_{i\alpha} \\ \mathbf{d} = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{r}_i \end{gathered}}$$

Дипольный момент

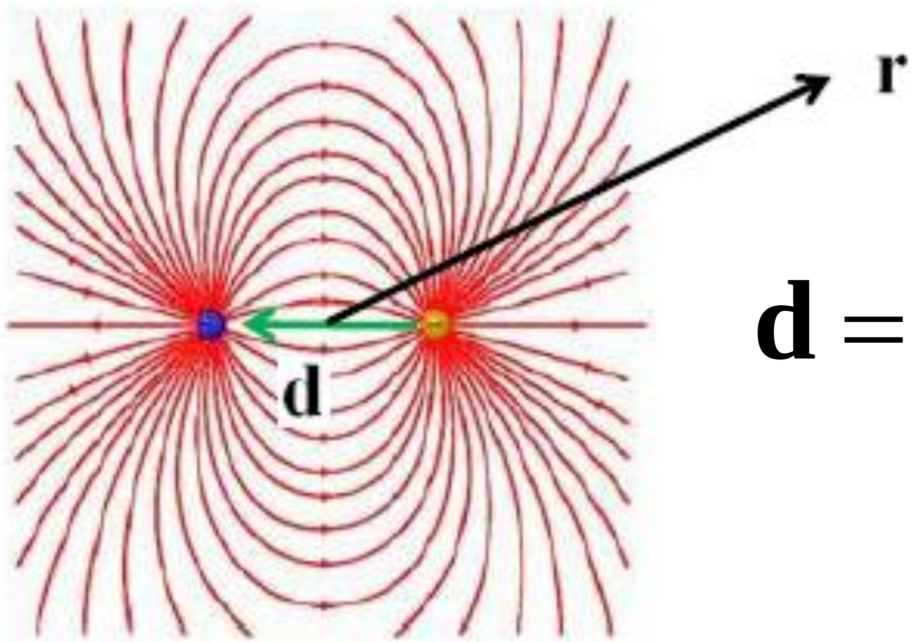
$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{grad}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{d} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{d}r^2}{r^5}\right)$$

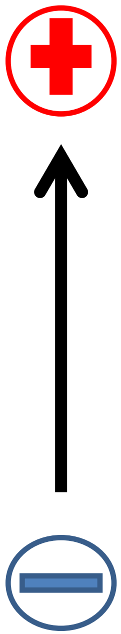
$$n = 2$$

$$\mathbf{d} = q\mathbf{l}$$

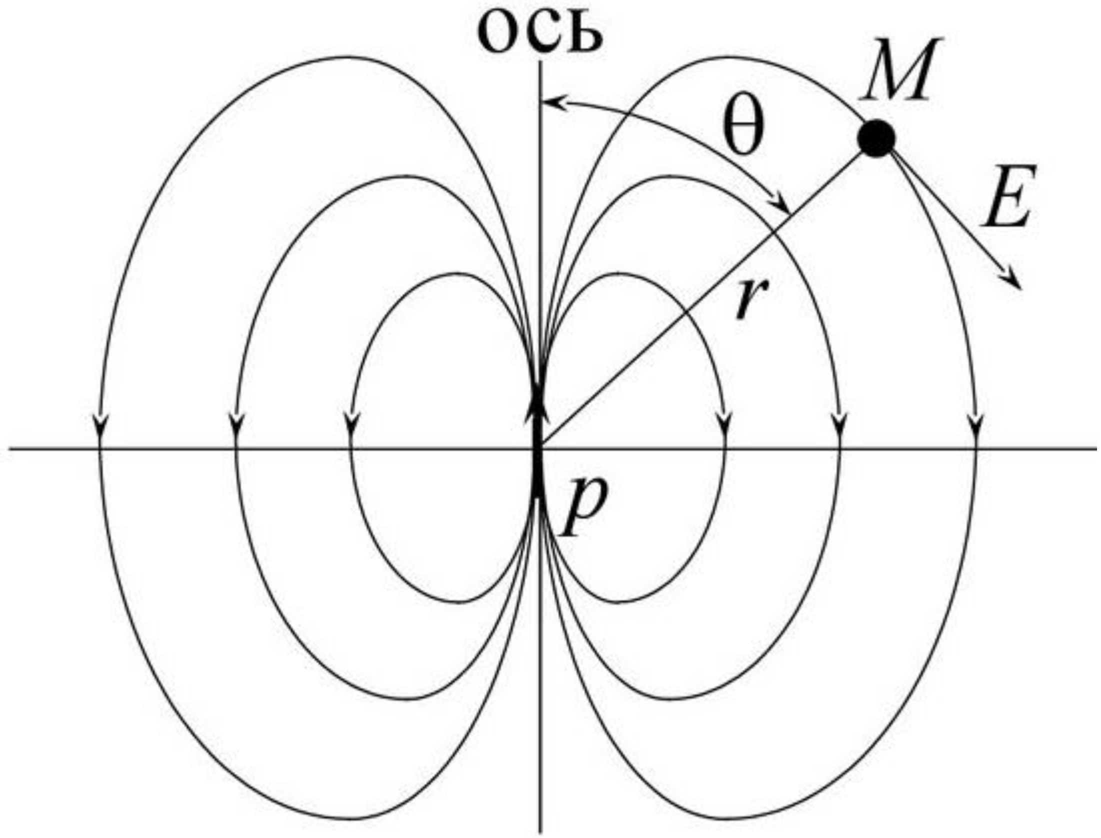


$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{r}_i$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

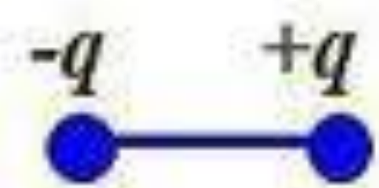


$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$$



$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} q_i x_{i\alpha} x_{i\beta} \quad \varphi_2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} Q_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{\mathbf{r}_i = 0}$$

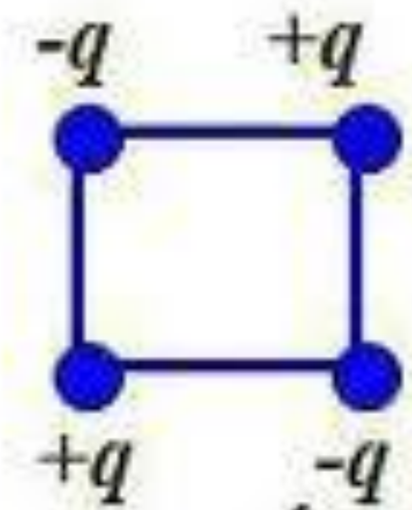
диполь



$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{r}_i$$

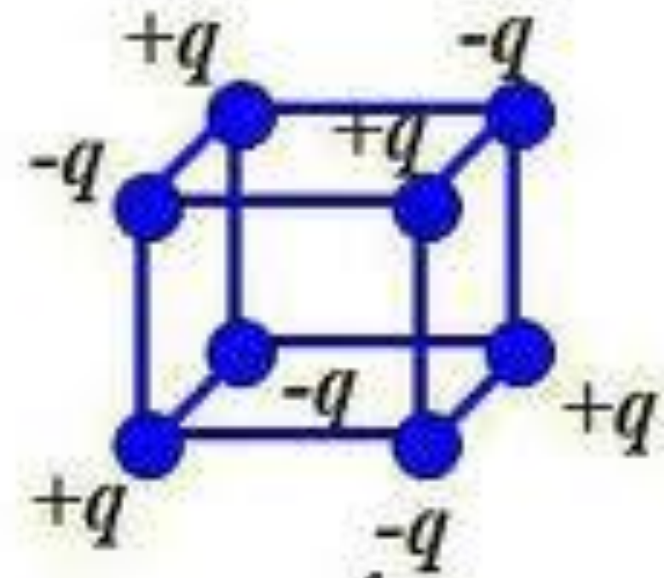
$$E \sim \frac{1}{r^3}$$

квадруполь



$$E \sim \frac{1}{r^4}$$

октуполь



$$E \sim \frac{1}{r^5}$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$W' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1' + q_2\varphi_2')$$

Энергия заряда

$$W'' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\Delta q_i \varphi_i' = \frac{1}{2} q\varphi_{соб}$$

Энергия системы зарядов

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2}\oint \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$$

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dv = \oint_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{a} = \varphi\,\mathrm{grad}\,\varphi \qquad \Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$$

$\mathbf{b} = \mathrm{grad}\,\varphi$ $\quad \operatorname{div}\alpha\mathbf{b} = \alpha\operatorname{div}\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathrm{grad}\,\alpha$

$\alpha = \varphi$

$$\int_V [\varphi\Delta\varphi + (\nabla\varphi)(\nabla\varphi)]dv = \oint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

$\to 0$

при

$V \to \infty$

$$\int_V \left(-\varphi\frac{\rho}{\varepsilon_0} + E^2\right)dv = \oint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

$\varphi \sim \dfrac{1}{r}$

$$W = \frac{1}{2}\oint \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint E^2(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

Энергия системы во внешнем поле

$$U = \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} q_i (\varphi(0) + r_i (\operatorname{grad}\varphi(0))_i + \ldots =$$

$$= Q\varphi(0) - \mathbf{E}(0)\mathbf{d} + \ldots$$

$= 0$ Для нейтральной системы

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{d})$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}) = [\mathbf{d}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}] + [\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{d}] +$$

$$= 0 \qquad = 0$$

$$+ (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{d} + (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}$$

$$= 0$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}$$

Поле внутри системы, состоящей из очень большого числа зарядов

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{v} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_m = \rho_m / \varepsilon_0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E}_m = 0$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{\nu_0} \int_{\nu_0} f_m \, dv \, dt$$

Электрическое поле в среде

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \overline{\rho}/\varepsilon_0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}_m} \qquad \overline{\rho}_m = \overline{\rho} \qquad \mathbf{j} = \overline{\rho_m \mathbf{v}}$$

$$\overline{\rho} = \rho_{своб} + \rho_{связ}$$

Проводники $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$

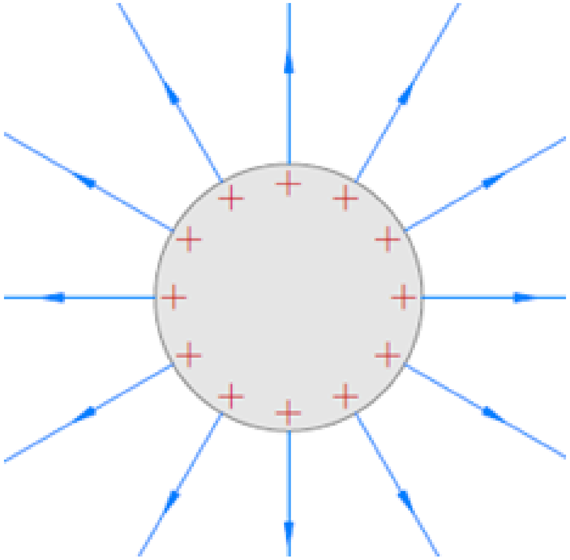
$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = IR$$

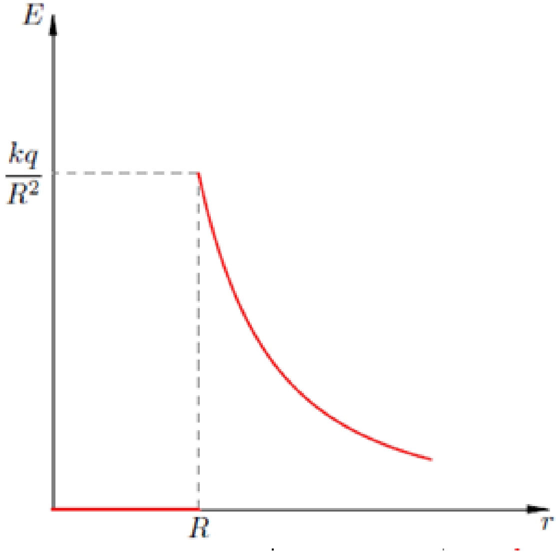
Электростатическое поле проводников

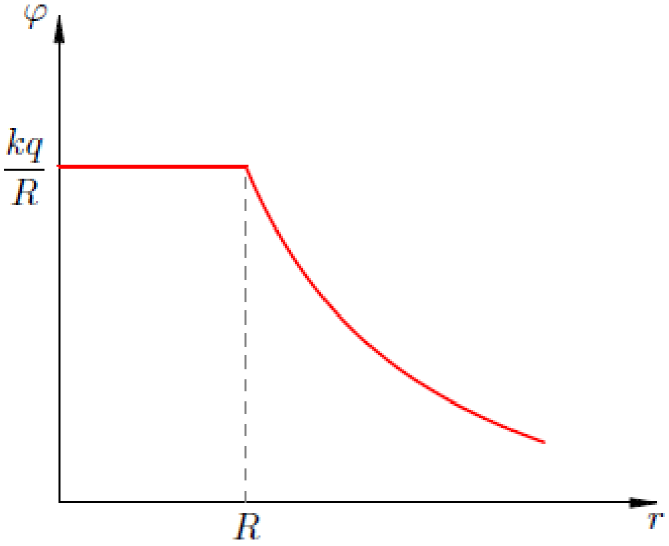
$$\partial\bar{\rho} / \partial t = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0 = \operatorname{div}\sigma\mathbf{E} = \sigma\operatorname{div}\mathbf{E} = (\sigma / \varepsilon_0)\bar{\rho}$$

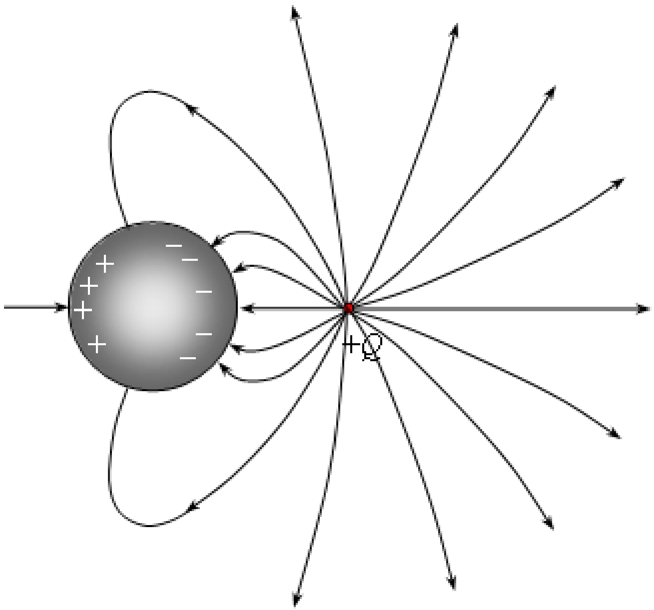
$$\bar{\rho} = 0$$

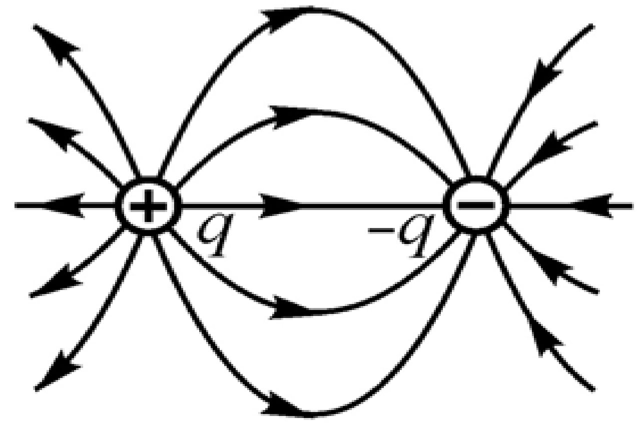


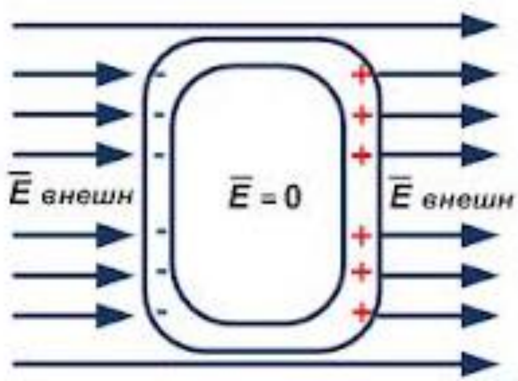


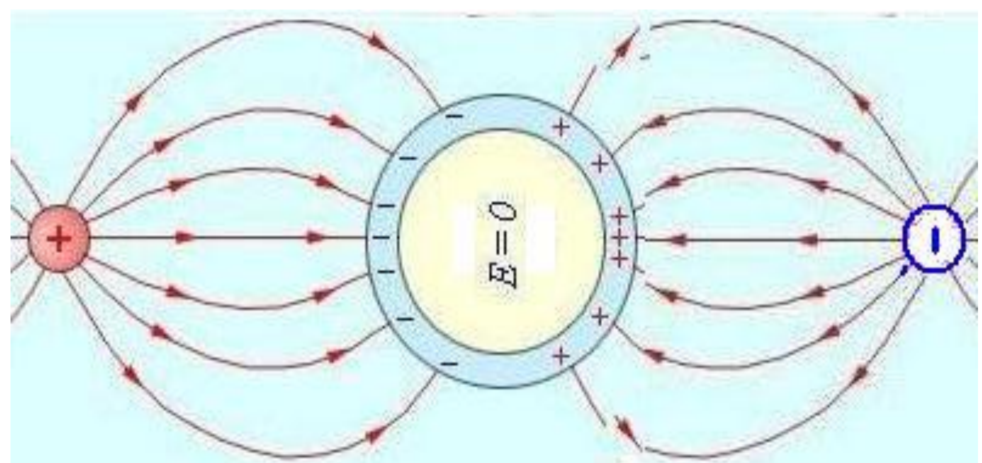


Проводники в электростатическом поле

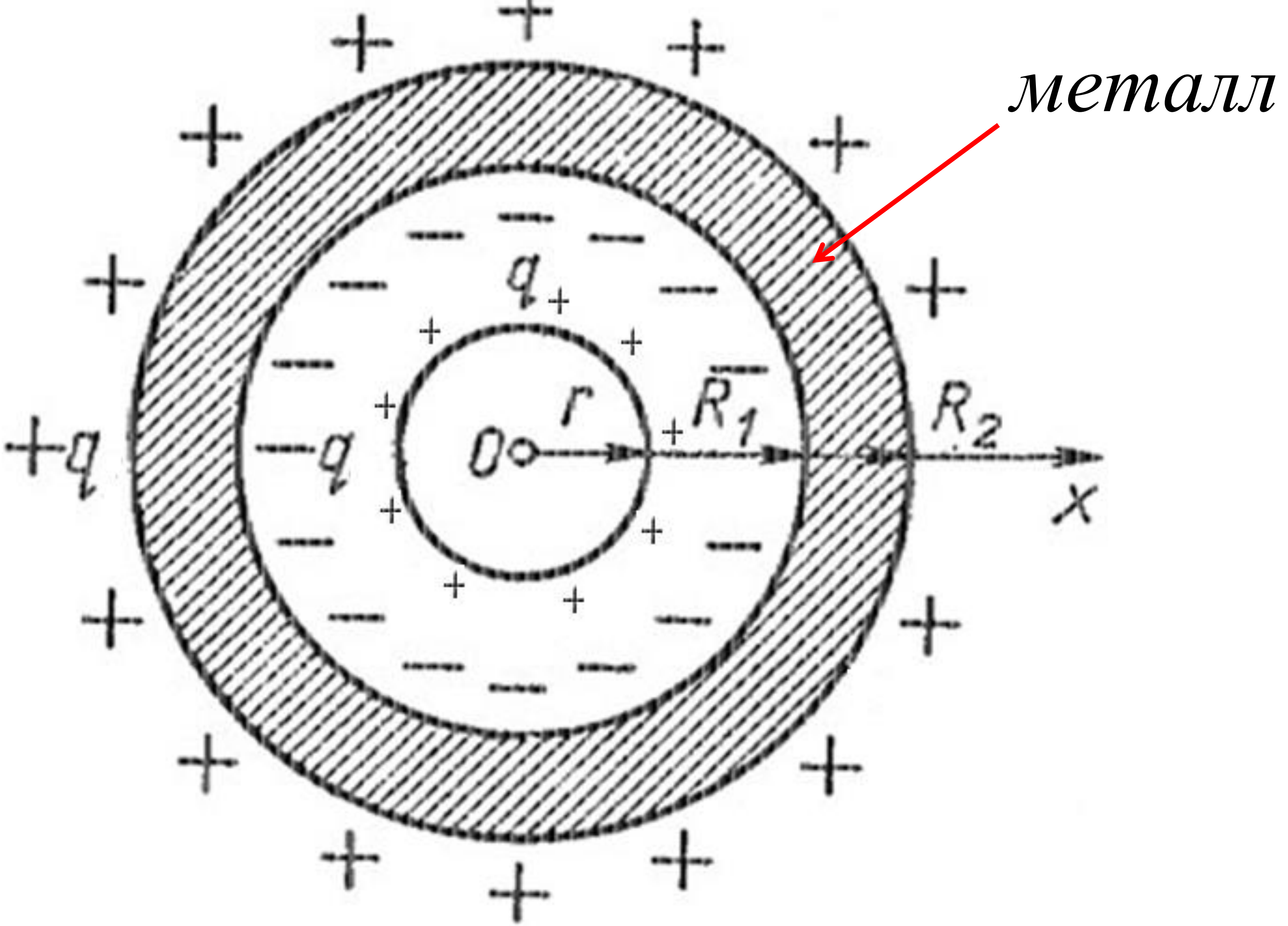




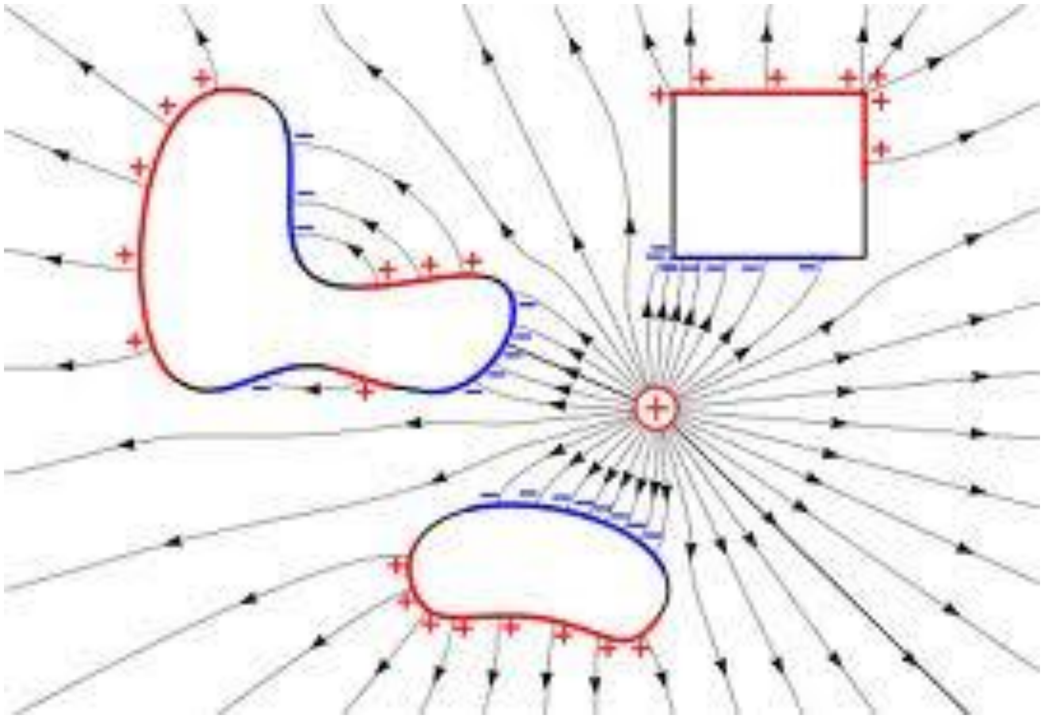


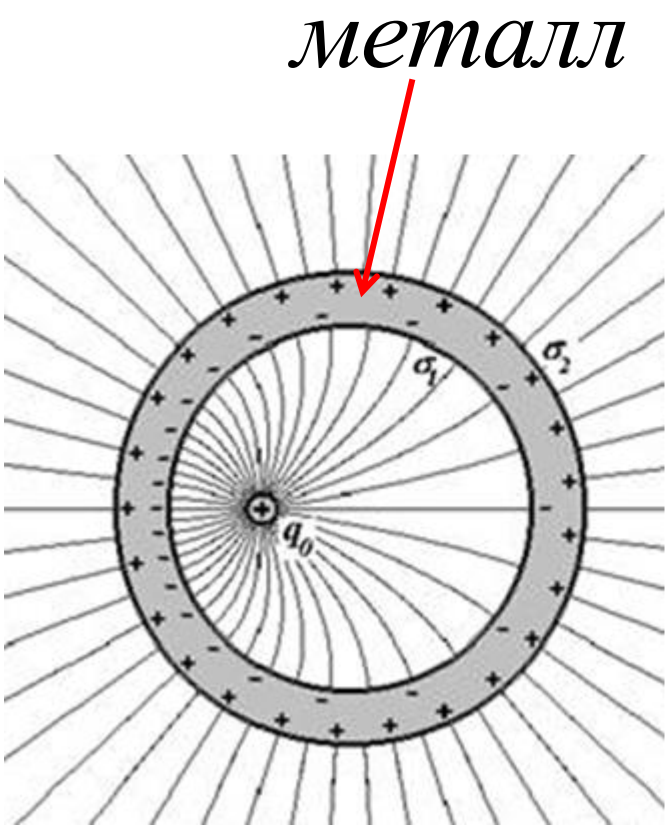


Проводники в электростатическом поле

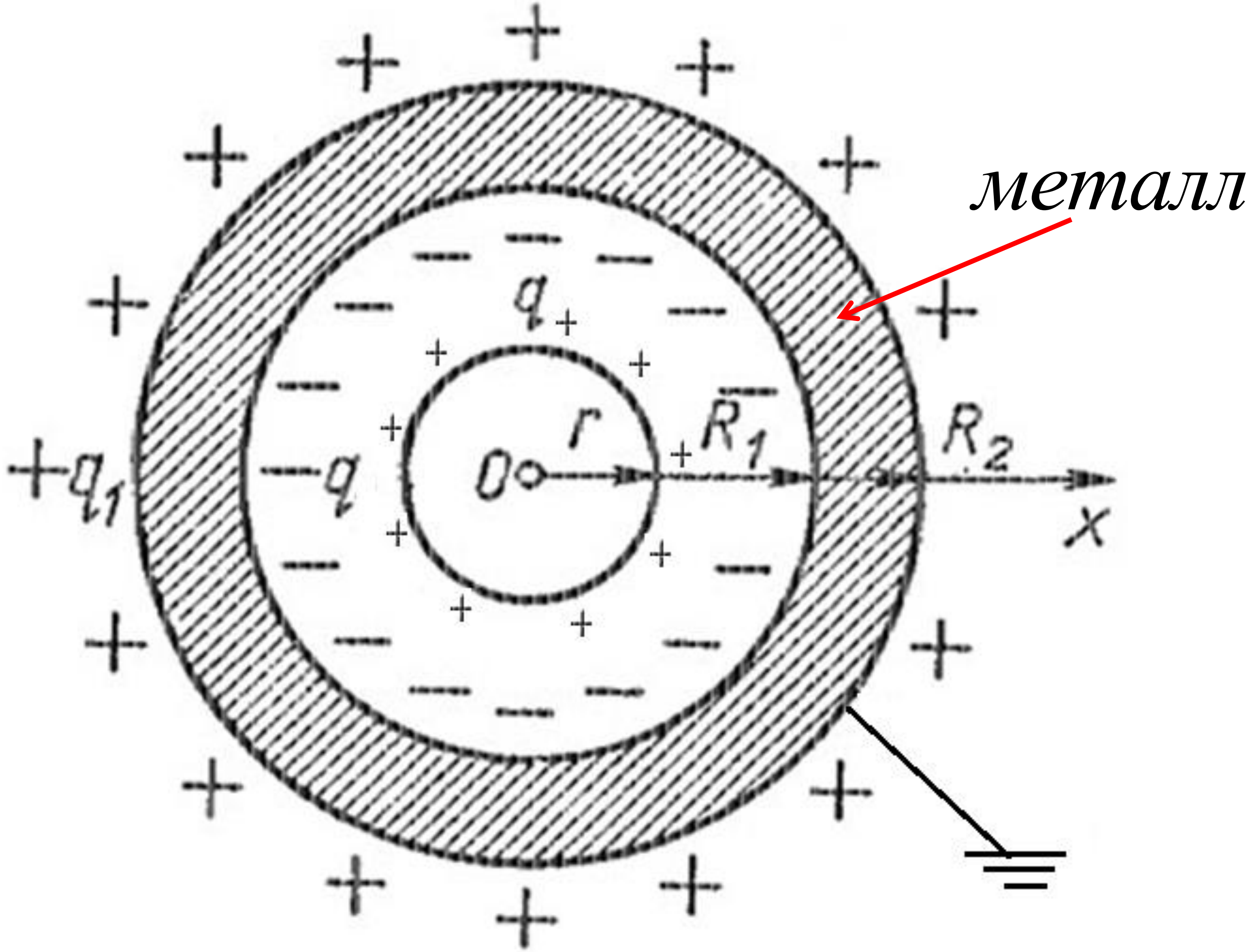


Проводники в электростатическом поле





Проводники в электростатическом поле

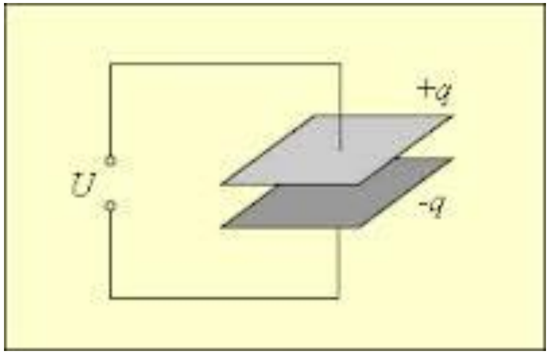


const

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 \\ \varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases}$$

$$Q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2$$

$$-Q = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2$$



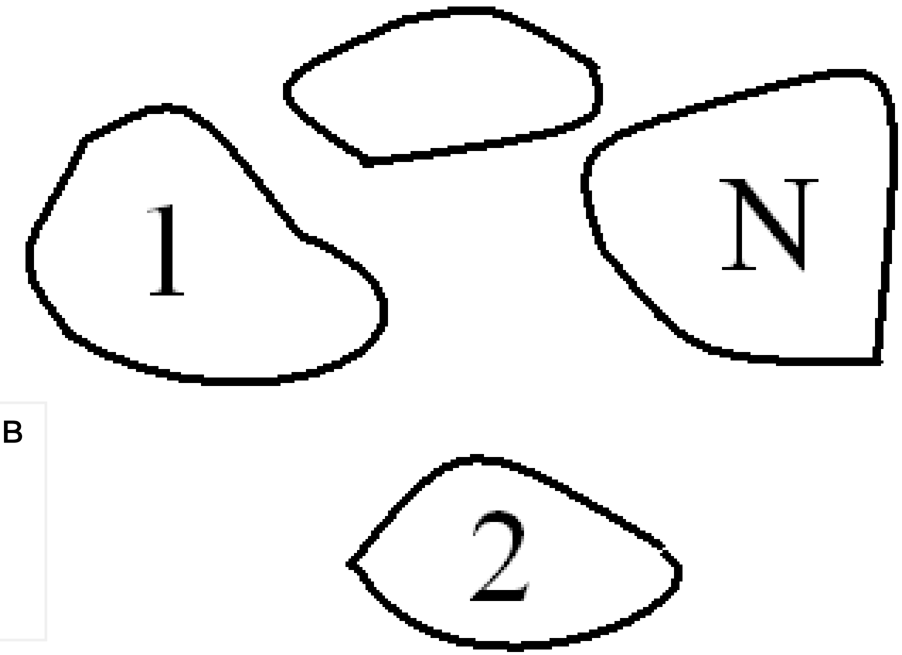
$$\frac{|Q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} = C$$

$$W = \frac{1}{2} Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} C_{ij}\varphi_i\varphi_j \qquad W_{конденсатора} = \frac{q^2}{2C}$$

Две задачи электростатики

$$\Delta\varphi = -\rho / \varepsilon_0$$



Найти распределение зар - ов
на поверх - ти пров - ов

Найти поле проводников

1. Задан потенциал каждого проводника

2. Задан суммарный заряд каждого проводника

Они имеют единственное решение !!!

Предположим, что существуют два решения $\varphi_{1,2}$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad \Delta\varphi = 0$$

Нулевые потенциалы проводников

$$\operatorname{div} \alpha \mathbf{b} = \alpha \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \operatorname{grad} \alpha$$

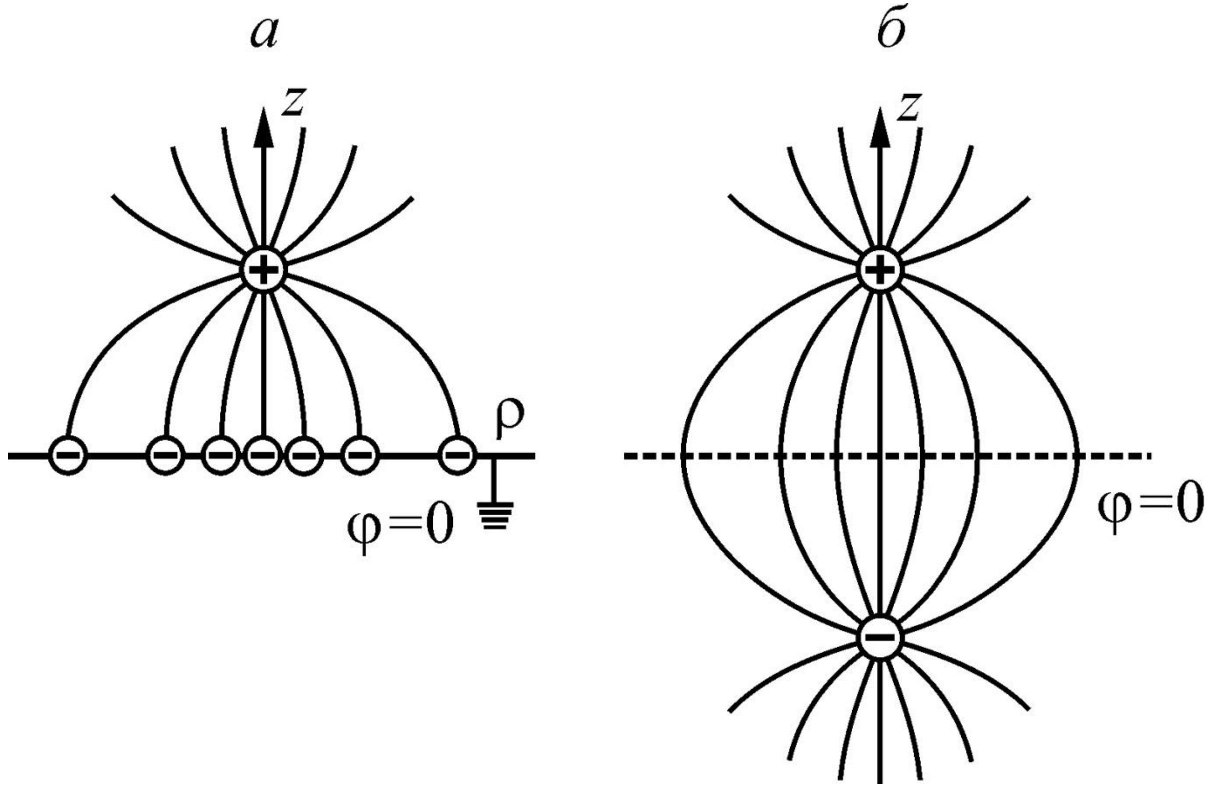
$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dv = \oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \qquad \mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \varphi$$

$$\int_V [\varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)(\nabla \varphi)] dv = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

$$\Downarrow$$

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

Т.к. на пов-ти
пров-ка = 0



$$\Delta\varphi = -q\delta(z-a)/\varepsilon_0 \qquad \varphi(x,y,z=0)=0$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{x}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}+\frac{x}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^3}}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}+\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^3}}\right)+$$

$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(+\frac{3x^2}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^5}}-\frac{3x^2}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^5}}\right)$$

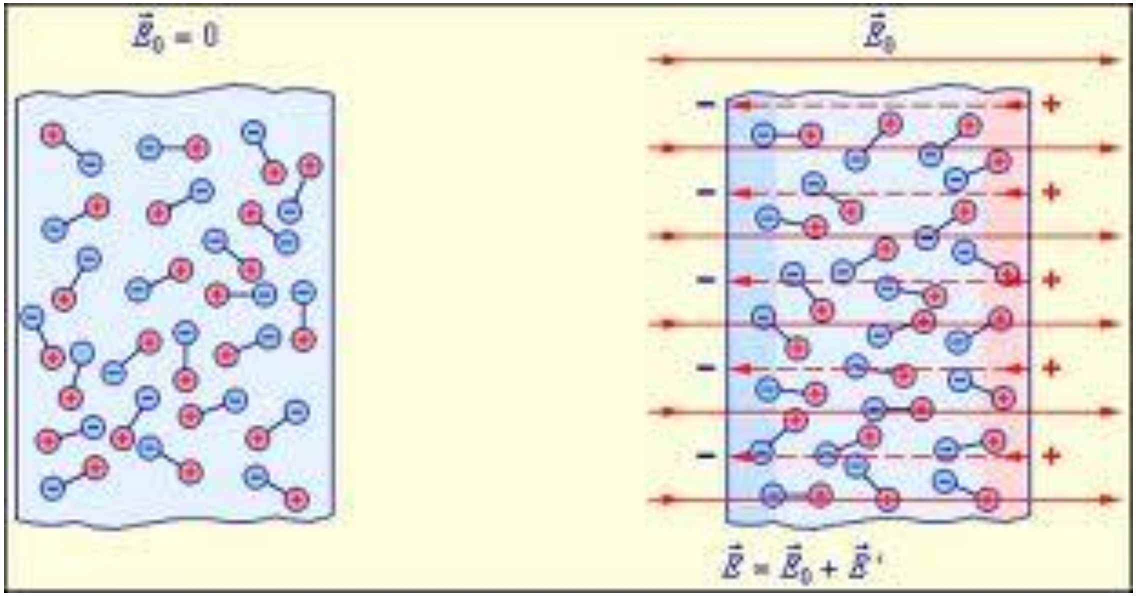
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}+\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^3}}\right)+$$

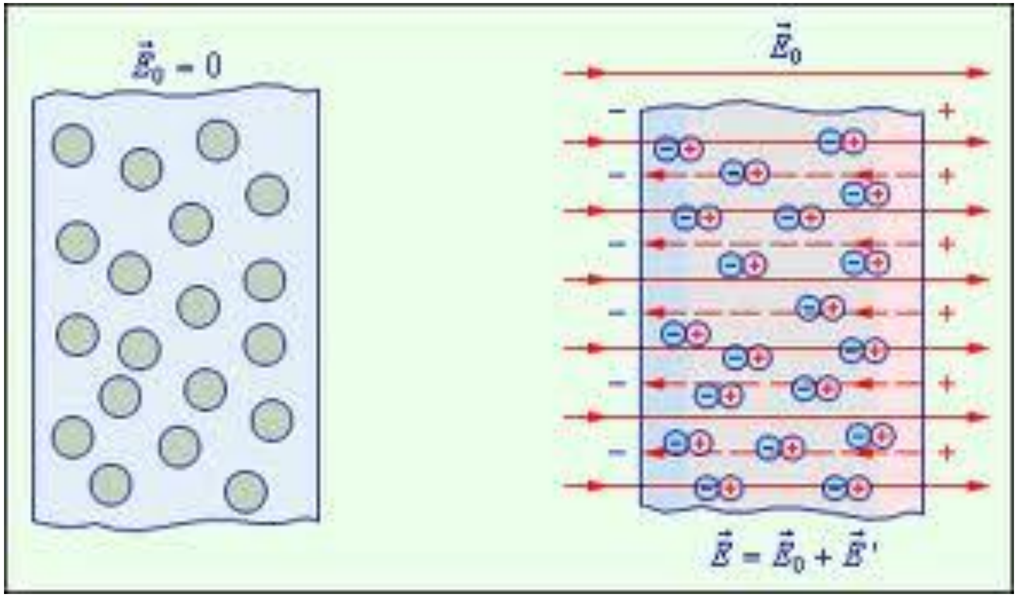
$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(+\frac{3y^2}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^5}}-\frac{3y^2}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^5}}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}+\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^3}}\right)+$$
$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(+\frac{3(z-a)^2}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^5}}-\frac{3(z+a)^2}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^5}}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^3}}+\frac{3}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^3}}\right)+$$
$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(+\frac{3[x^2+y^2+(z-a)^2]}{\sqrt{[x^2+y^2+(z-a)^2]^5}}-\frac{3[x^2+y^2+(z-a)^2]}{\sqrt{[x^2+y^2+(z+a)^2]^5}}\right)=0$$

Диэлектрики





Электрическое поле в диэлектриках

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \overline{\rho}/\varepsilon_0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}_m} \qquad \overline{\rho} = \rho_{связ} \qquad \mathbf{j} = \overline{\rho_{связ}\mathbf{v}}$$

Введем поляризованность среды $\mathbf{P}$

с помощью соотношения $\mathbf{j} = \partial\mathbf{P}/\partial t$

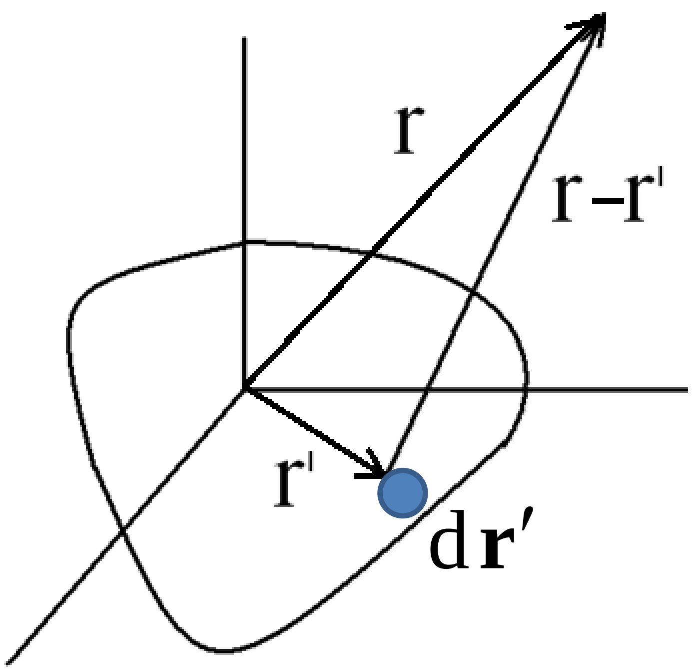
$$\mathbf{P} = f(\mathbf{E}) \qquad \mathbf{P} = \hat{\chi}\varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \rho_{связ}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{связ} + \operatorname{div}\mathbf{P}\right) = 0 \Rightarrow \rho_{связ} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$

$$\varphi_{связ}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_{связ}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\operatorname{div}'\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \underset{\overset{\|}{0}}{\frac{P_n dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} =$$



$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\operatorname{div}'\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' +$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \operatorname{div}'\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' =$$

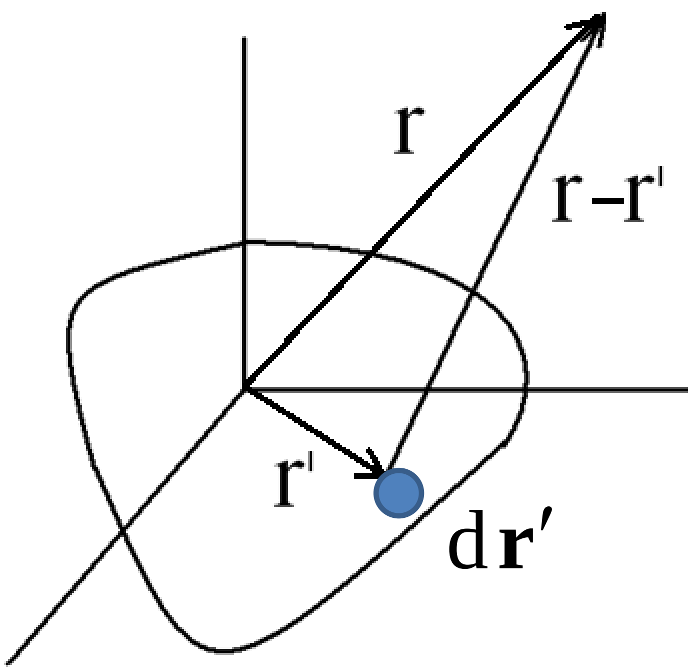
$$\operatorname{div}(\gamma\mathbf{a}) = \gamma\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\gamma$$

$$\varphi_{связ}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot \text{grad}'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \mathbf{P}(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\mathbf{r}'$$

$$\varphi_{связ}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\mathbf{d} = \int\limits_V \rho_{связ}(\mathbf{r}')\mathbf{r}'d\mathbf{r}' = \int\limits_V \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$



$$\varphi_{связ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{d} = \int\limits_V \rho_{связ}(\mathbf{r}')\mathbf{r}'d\mathbf{r}' = \int\limits_V \mathbf{P}d\mathbf{r}'$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \overline{\rho}/\varepsilon_0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$$

$$\overline{\rho} = \rho_{своб} + \rho_{связ} = \rho_{своб} - \operatorname{div}\mathbf{P}$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho_{своб} - \operatorname{div}\mathbf{P}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_{своб}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}$$

$$\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q_{своб}$$

Вакуум	Диэлектрик
$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$	$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_{своб}$
	$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\varepsilon_0\mathbf{E}$
$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$	$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$
$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$	$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$
$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$	$\operatorname{div}\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi = -\rho$

Граничные условия

Граничные условия для тангенциальной составляющей вектора **E**. Построим вблизи границы раздела диэлектриков *1* и *2* замкнутый контур (рис. 83). Вследствие потенциальности электрического поля циркуляция **E** по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_{ABCDA} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0. \qquad (17.39)$$

Интегралы по участкам *BC* и *DA* сколь угодно малы, так как *AB* и *CD* расположены бесконечно близко к поверхности раздела. Знаки интегралов по *AB* и *CD* противоположны ввиду того, что пути интегрирования проходят в противоположных направлениях. Поэтому [см. (17.39)]

$$\boxed{E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.} \qquad (17.40)$$

нения (17.17) по объему этого цилиндра:

$$\int_V \rho_{св}\, dV = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{P}\, dV. \qquad (17.18)$$

В левой части (17.18) стоит полный заряд внутри объема, т. е. поверхностный заряд $\sigma_{св}\,\Delta S$. Правую часть равенства преобразуем по теореме Гаусса – Остроградского в интеграл по поверхности:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{P}\, dV = \int_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{P}_2\cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_1} \mathbf{P}_1\cdot d\mathbf{S}_1, \qquad (17.19)$$

и через боковые поверхности цилиндра. Потоки через боковые поверхности полагаются равными нулю, поскольку в пределе высота *h* цилиндра стремится к нулю. Выберем в качестве положительной

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \qquad\qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

сво

$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma \qquad\qquad \mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0$$

Единственность решения системы

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \qquad\qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

Пусть $\operatorname{div} \mathbf{D}_{1,2} = \rho \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E}_{1,2} = 0$

$$\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 = \mathbf{D} \qquad \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$$

$\mathbf{D},\quad \mathbf{E}$ – удовлетворяют нулевым граничным условиям

$$\operatorname{div}\gamma\mathbf{a} = \gamma\operatorname{div}\mathbf{a} + \operatorname{grad}\gamma\cdot\mathbf{a} \qquad \mathbf{a} = \mathbf{D},\quad \gamma = \varphi$$

$$\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dV = -\int_V \mathbf{D}\cdot\operatorname{grad}\varphi\,dV = -\int_V \operatorname{div}(\varphi\mathbf{D})\,dV$$

$$+\int_V \varphi\,\underbrace{\operatorname{div}\mathbf{D}}_{=0}\,dV = -\int_{S_0}\varphi\mathbf{D}\,d\mathbf{S} \to 0 \qquad (\mathbf{D}_n = 0)$$

причем поверхностный интеграл должен быть взят лишь по граничной поверхности S, ибо во всем поле как φ'', так, согласно (A′), и D_n'' остаются непрерывными. Если теперь распространить интегрирование по объему *полного поля*, то интеграл по поверхности S обращается в нуль. Следовательно,

Сила, действующая на диэлектрик во внешнем электрическом поле

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{E} = \int\limits_{V_0} (\tilde{\mathbf{d}}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{E}\,dV$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \int\limits_{V_0} \mathbf{f}\,dV = \int\limits_{V_0} (\mathbf{P}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{E}\,dV$$

$$\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\boxed{\mathbf{f} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)(\mathbf{E}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{E}}$$

Постоянный электрический ток в проводниках

$$\partial / \partial t = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{j} = \mathrm{const}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

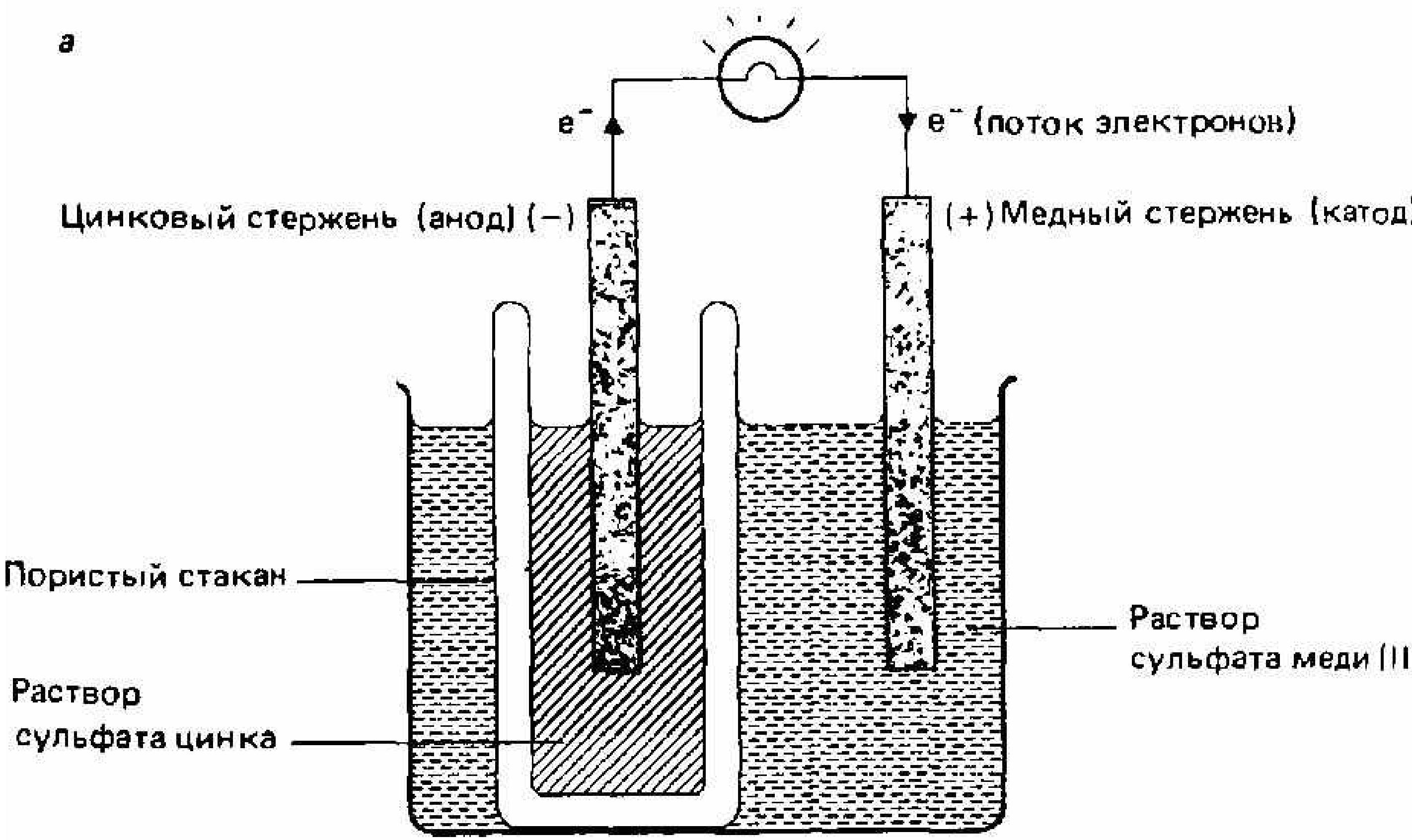
$\Rightarrow$ Линии тока всегда замкнуты

же быть замкнутыми. В противном случае, линейный интеграл $\oint_L E_s\, ds$ по каждой из замкнутых линий сил L был бы отличен от нуля (ибо элементы $d\mathbf{s}$ линий сил параллельны $\mathbf{E}$ и, стало быть, подынтегральное выражение существенно положительно), что противоречит уравнению (7.3). Стало быть, *в электроста-*

$$\Rightarrow \mathbf{j}_{1n} = \mathbf{j}_{2n}$$

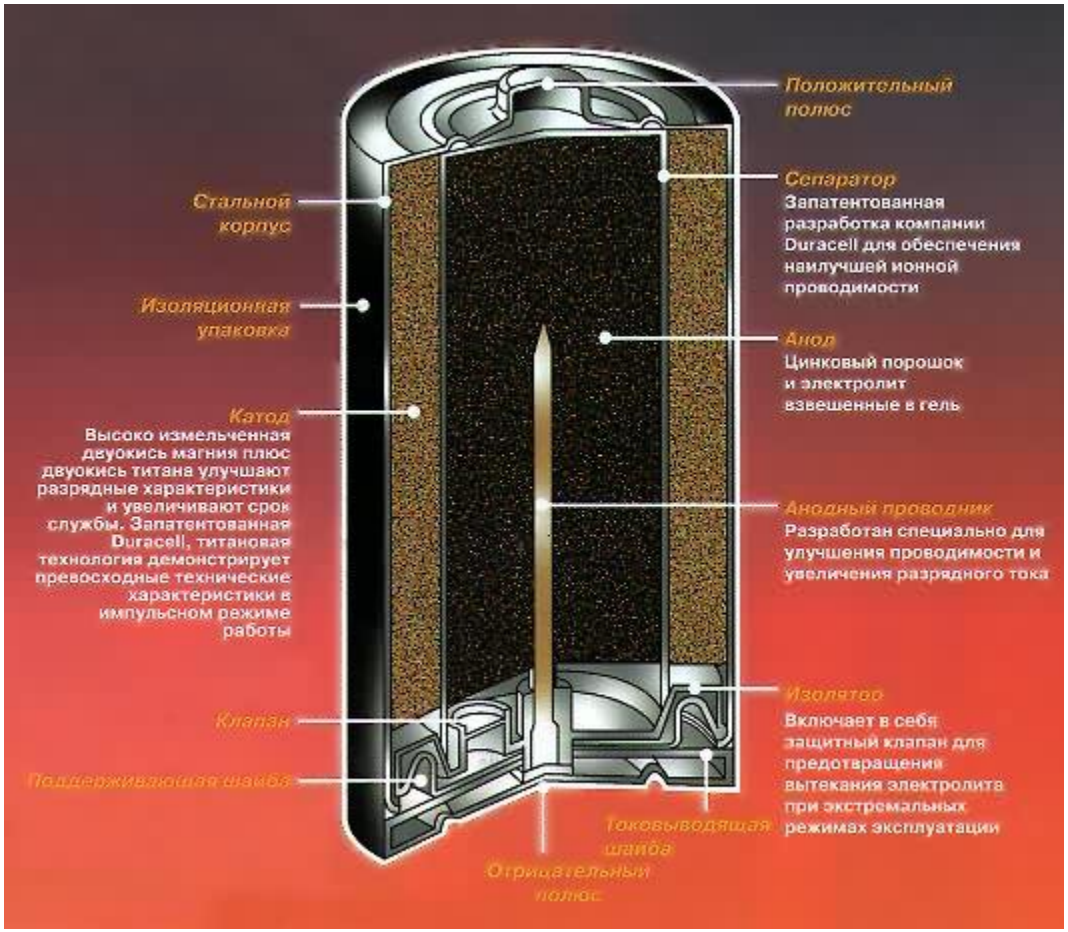
$$\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = I_{12} R_{12}$$

$$\int_1^2 (\mathbf{E}_{пот} + \mathbf{E}_{стор}) d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = I_{12} R_{12}$$



Для замкнутой цепи

$$\int_1^2 \mathbf{E}_{стор} d\mathbf{l} = \varepsilon_{12} = I_{12} R_{12}$$


Положительный полюс
Сепаратор
Запатентованная разработка компании Duracell для обеспечения наилучшей ионной проводимости
Стальной корпус
Изоляционная упаковка
Анод
Цинковый порошок и электролит взвешенные в гель
Катод
Высоко измельченная двуокись магния плюс двуокись титана улучшают разрядные характеристики и увеличивают срок службы. Запатентованная Duracell, титановая технология демонстрирует превосходные технические характеристики в импульсном режиме работы
Анодный проводник
Разработан специально для улучшения проводимости и увеличения разрядного тока
Изолятор
Включает в себя защитный клапан для предотвращения вытекания электролита при экстремальных режимах эксплуатации
Клапан
Поддерживающая шайба
Токовыводящая шайба
Отрицательный полюс

Правила Кирхгофа:

Алгебраическая сумма всех токов, втекающих в любой узел, равна нулю.

Для любого контура алгебраическая сумма падений напряжения на его элементах равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = I_{12} R_{12}$$

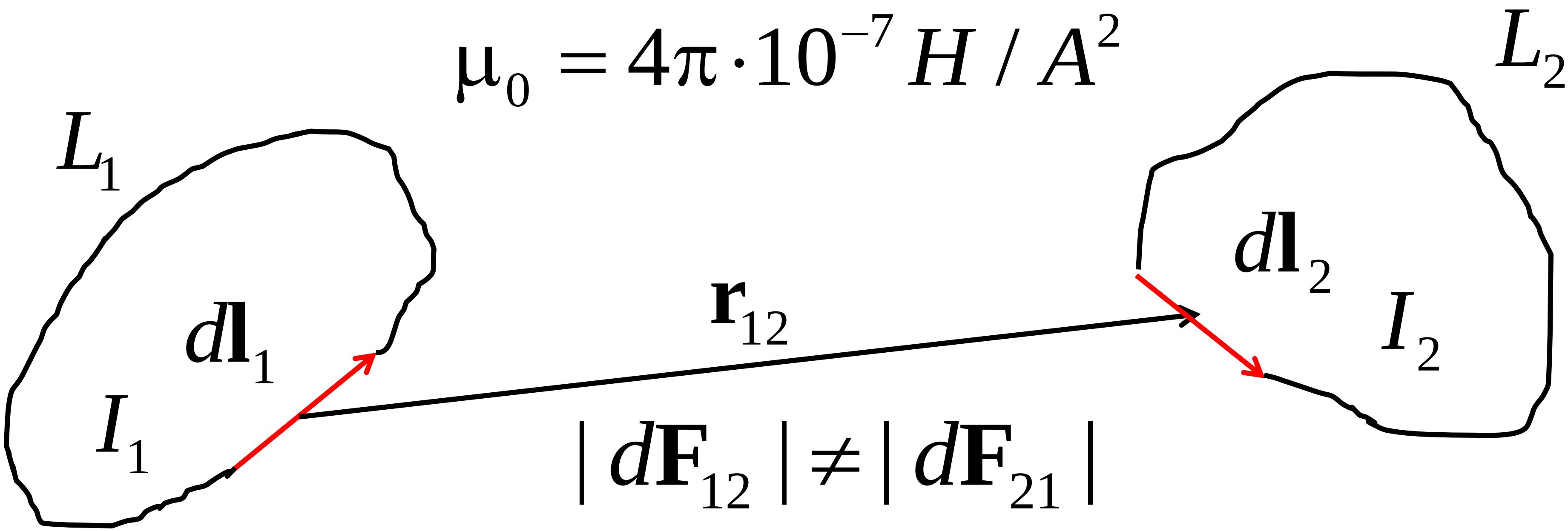
 

$$N = I^2 R$$

Закон Ампера

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 [d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]}{4\pi r_{12}^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H / A^2$$



$$|d\mathbf{F}_{12}| \neq |d\mathbf{F}_{21}|$$

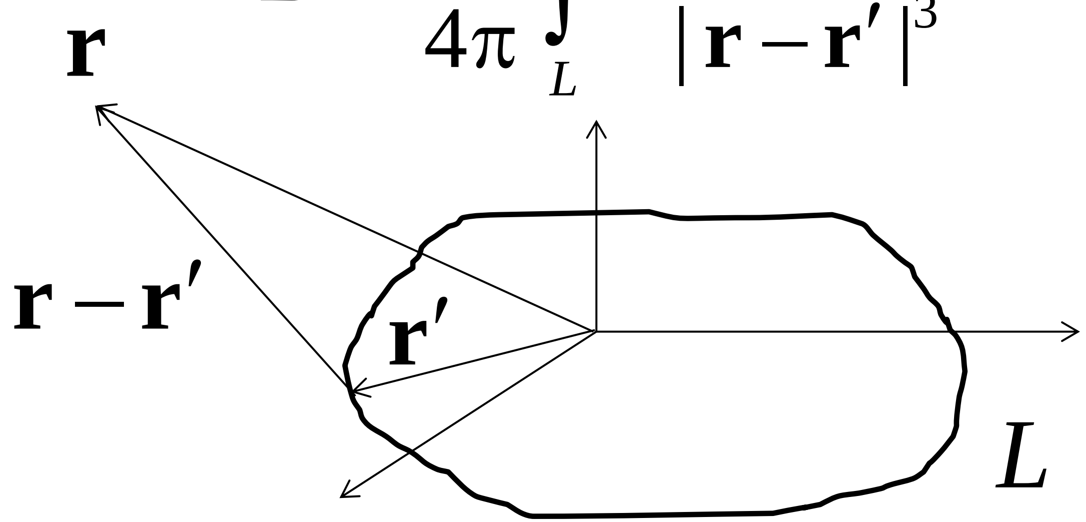
$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3} \qquad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Индукция магнитного поля

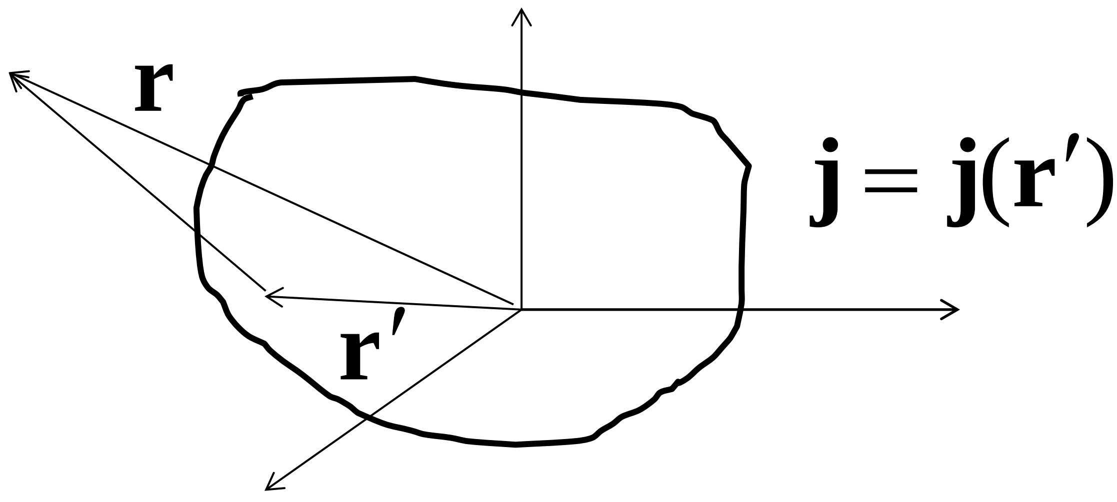
$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 [d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]}{4\pi r_{12}^3}$$

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 [d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}_{12}] \qquad d\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]}{4\pi r_{12}^3}$$

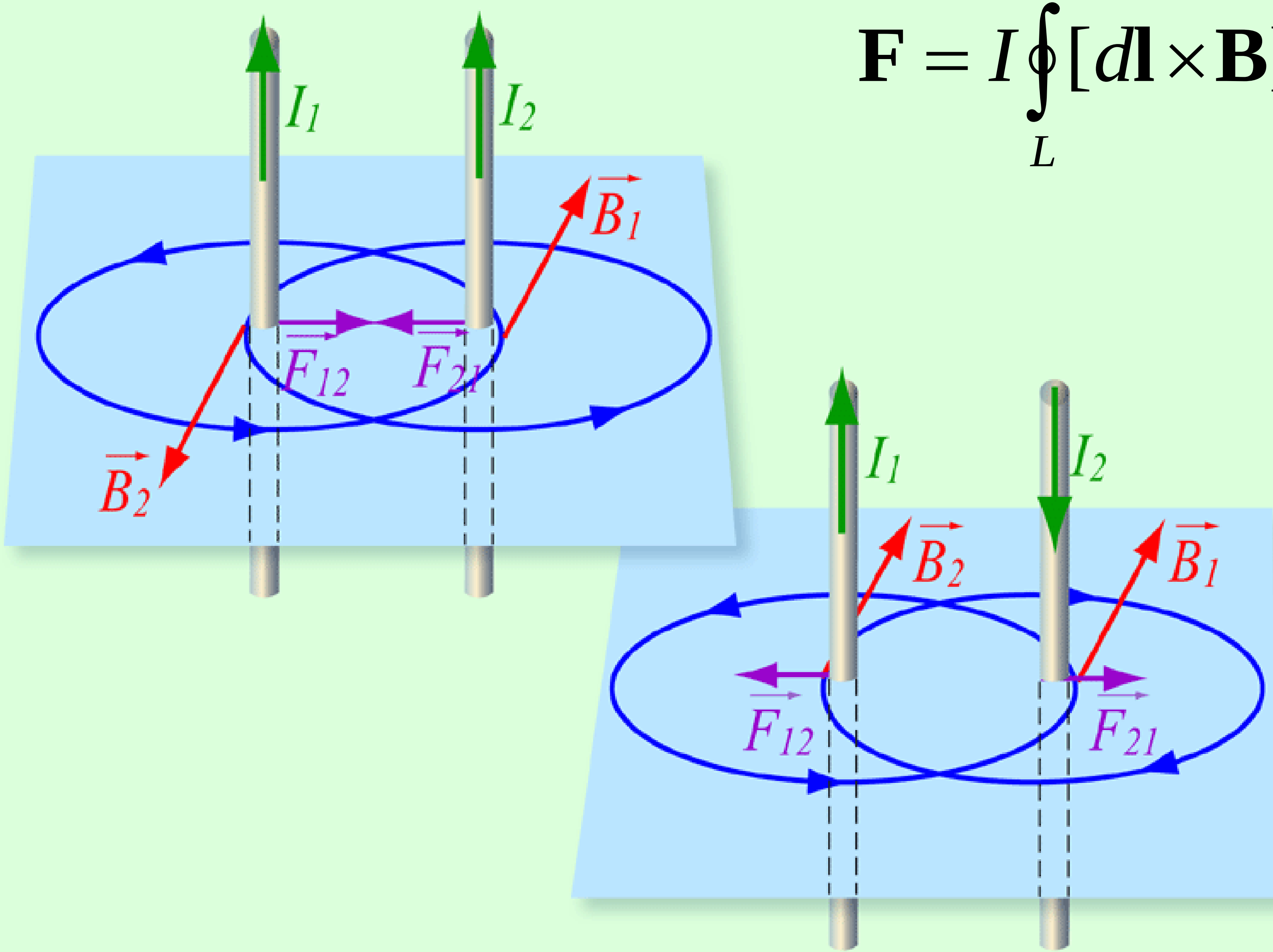
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{[d\mathbf{l}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$



$$\mathbf{F} = I\oint_L [d\mathbf{l}\times\mathbf{B}]$$

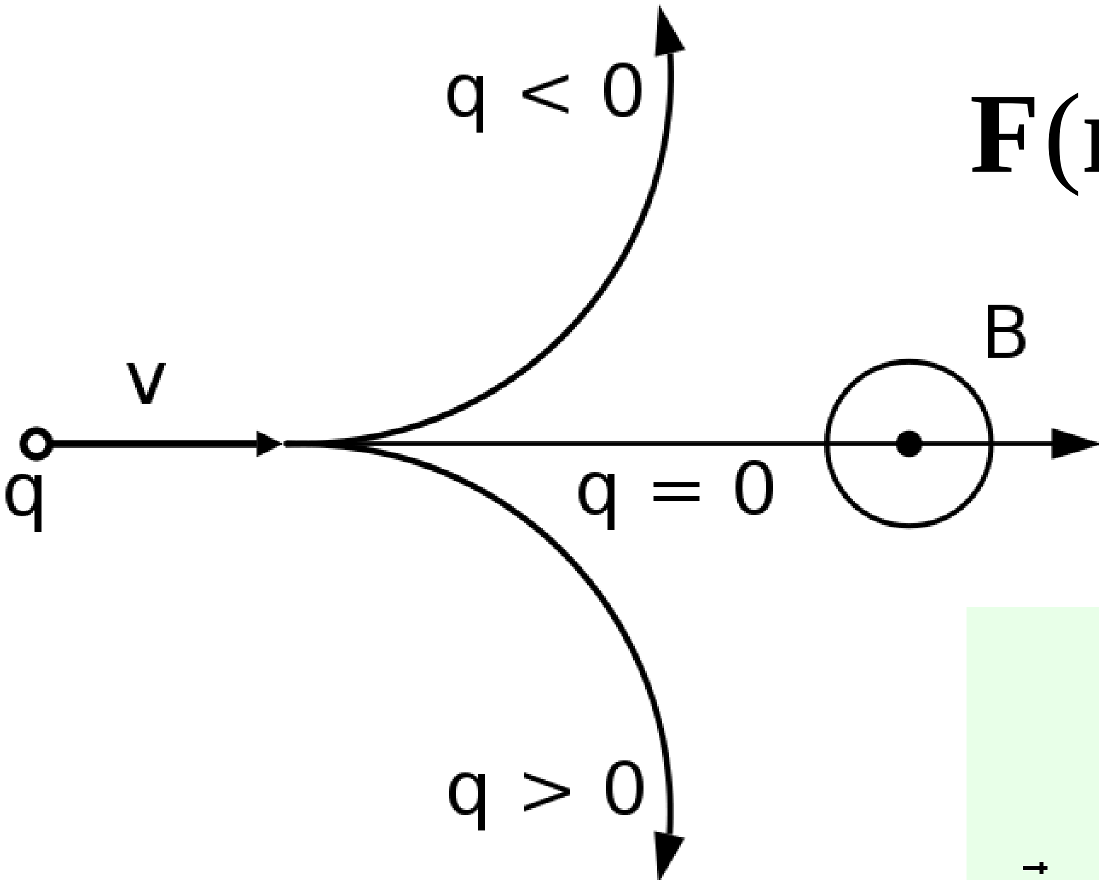


$$\mathbf{F} = I\oint_L [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$$

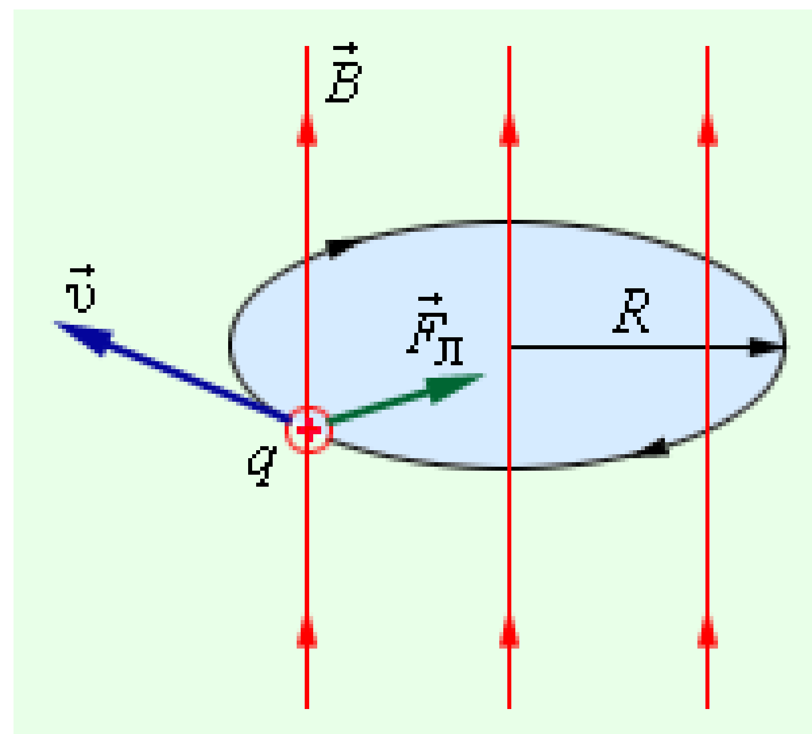
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_V [\mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')]d\mathbf{r}'$$

Сила Лоренца

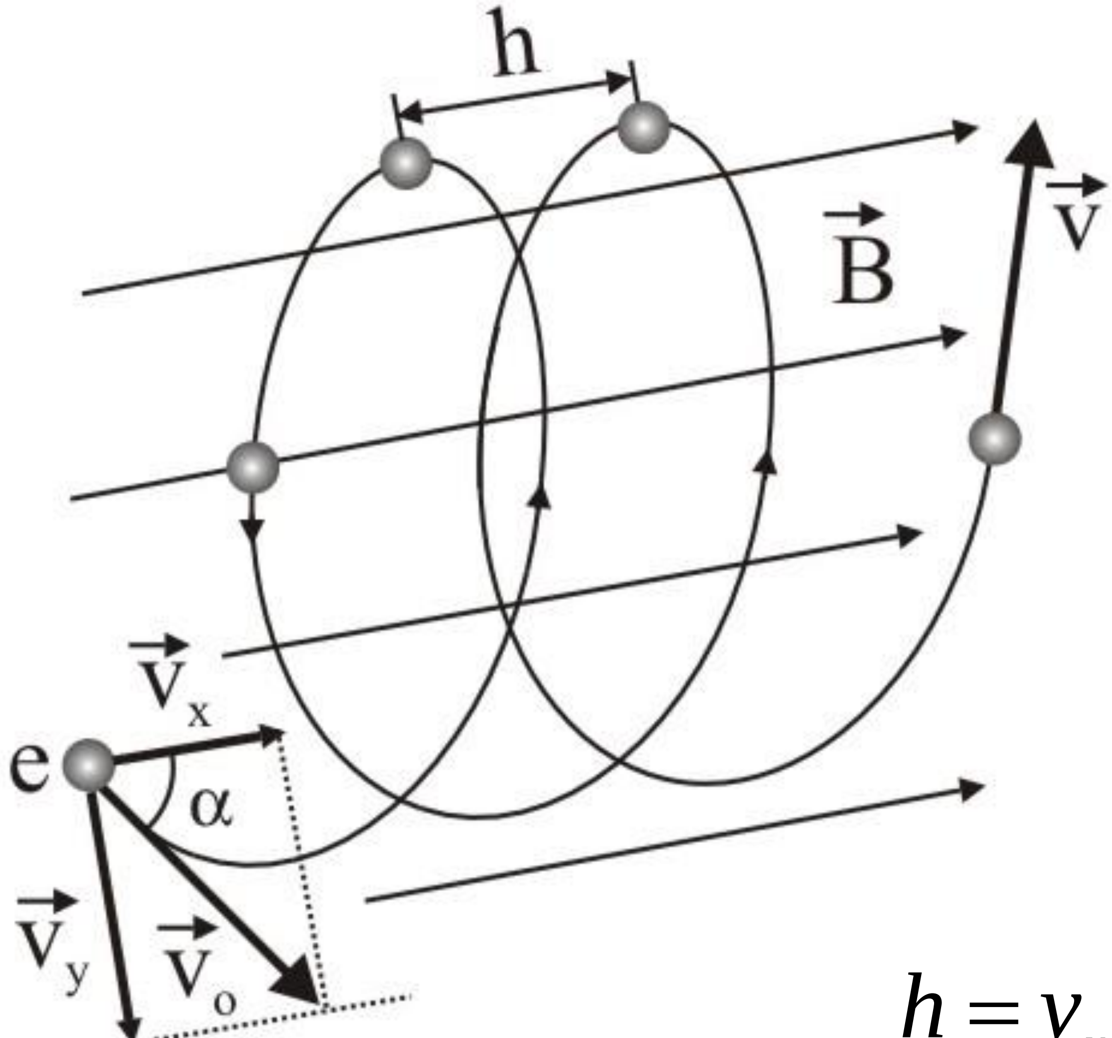
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\oint_V [\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')]d\mathbf{r}' = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$



$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$



$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$



$$\frac{mv_y^2}{r} = qBv_y$$

$$v_y = qBr / m$$

$$\omega = qB / m$$

$$T = 2\pi m / qB$$

$$h = v_x T = 2\pi m v_x / qB$$

Векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \quad ?$$

Да!

$$\operatorname{rot}\gamma\mathbf{a} = \gamma\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad}\gamma\times\mathbf{a}]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')\right]d\mathbf{r}' =$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0}$$

Свойства векторного потенциала

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{A} = 0}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \operatorname{div}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{j_n(\mathbf{r}')dS}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 0$$

Свойства векторного потенциала

$$\mathrm{A}_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathrm{j}_x(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{r - r'}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{r - r'} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{r - r'} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\mathbf{A}}_{=0} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\int\limits_{S_0} \operatorname{rot}\mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \mu_0 \int\limits_{S_0} \mathbf{j}\, d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\oint\limits_{L} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k}$$

Полная система уравнений для индукции магнитного поля

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0}$$

Граничные условия

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{i} \qquad \mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n}$$

Единственность решения системы уравнений для индукции магнитного поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{B}' = \mathbf{B}''$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}'' = 0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}'' = 0 \qquad \mathbf{B}''_{2t} - \mathbf{B}''_{1t} = 0 \qquad \mathbf{B}''_{2n} = \mathbf{B}''_{1n}$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$$

$$\int \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}\,dv = \int \operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]dv + \underbrace{\int \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}\,dv}_{=0}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}'' \qquad \mathbf{a} = \mathbf{A}'' \qquad \mathbf{B}'' = \operatorname{rot}\mathbf{A}''$$

$$\int_V \mathbf{B}''\cdot\mathbf{B}''dv = \int_V \operatorname{div}[\mathbf{A}''\times\mathbf{B}'']dv = \int_S [\mathbf{A}''\times\mathbf{B}'']_n dS \Rightarrow 0$$